dtv

Primzahlen sind die «Atome» der Arithmetik – nur durch eins und sich selbst teilbar. Gleichzeitig gehören sie zu den quälendsten Geheimnissen der Wissenschaft. 2, 3, 5, 7, … – lässt sich voraussagen, welches die nächste Primzahl ist? Verbirgt sich hinter dem Rhythmus ihres Auftretens vielleicht ein bestimmtes Muster? Oder gibt es gar eine Formel, mit der sich Primzahlen erzeugen lassen?

In diesem ungewöhnlichen Buch wird die Geschichte der ebenso exzentrischen wie brillanten Menschen erzählt, die das Mysterium der Primzahlen zu entschleiern suchten. Der Lösung vielleicht am nächsten kam der deutsche Mathematiker Bernhard Riemann. Im Mittelpunkt seiner Überlegungen stand dabei die Idee einer Harmonie zwischen Prim- und anderen Zahlen. Nie schien man der Enthüllung des Geheimnisses der Primzahlen so nah gewesen zu sein wie damals. Doch als Riemann starb, verbrannte seine Haushälterin alle Unterlagen, und deshalb ist die so genannte Riemann-Hypothese auch heute noch das große, alles überragende Rätsel der Mathematik. «Mein Buch des Jahres» nannte George Steiner Sautoys großartige Erzählung von einem der großen Abenteuer des Geistes.

Marcus du Sautoy, Professor für Mathematik an der Universität von Oxford und Research Fellow der Royal Society, genießt in seinem Fach hohes Ansehen. Er lebt in London, schreibt regelmäßig populärwissenschaftliche Beiträge für die ‹Times› und den ‹Guardian› und ist häufiger Gast in Rundfunk und Fernsehen.

Marcus du Sautoy

Die Musik der Primzahlen

Auf den Spuren des größten
Rätsels der Mathematik

Mit s/w-Abbildungen

Aus dem Englischen von Thomas Filk

Deutscher Taschenbuch Verlag

Von Marcus du Sautoy außerdem bei dtv lieferbar:
Das Geheimnis der Symmetrie (34658)

**Ausführliche Informationen über
unsere Autoren und Bücher
finden Sie auf unserer Website
www.dtv.de**

FSC
www.fsc.org
MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C019821

Ungekürzte Ausgabe 2006
8. Auflage 2014
Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co. KG,
München

Titel der englischen Originalausgabe:
‹The Music of the Primes.
Why an Unsolved Problem in Mathematics Matters›
(Fourth Estate, London)

Umschlagkonzept: Balk & Brumshagen
Satz: Fotosatz Reinhard Amann, Aichstetten
Druck und Bindung: Druckerei C. H. Beck, Nördlingen
Gedruckt auf säurefreiem, chlorfrei gebleichtem Papier
Printed in Germany · ISBN 978-3-423-34299-5

In Erinnerung
an
Yonathan du Sautoy

21. Oktober 2000

Inhalt

Wer wird Millionär?

«Was ist das für eine Zahlenfolge? Okay, das können wir auch im Kopf … neunundfünfzig, einundsechzig, siebenundsechzig … einundsiebzig … Sind das nicht alles Primzahlen?» Im Kontrollraum machte sich eine gewisse Unruhe breit. Für einen kurzen Augenblick zeigte Ellies Gesicht eine tiefe Erregung, die jedoch rasch wieder von einer Nüchternheit überdeckt wurde, einer Angst, sich zu vergessen oder unwissenschaftlich, dumm, zu erscheinen.

Carl Sagan, *Contact*

An einem heißen, schwülen Augustmorgen des Jahres 1900 hielt David Hilbert, damals Professor für Mathematik an der Universität von Göttingen, einen Vortrag an der Sorbonne in Paris. Hilbert galt bereits zu Lebzeiten als einer der größten Mathematiker seiner Zeit, und der Vorlesungssaal war bis auf den letzten Platz gefüllt. Die Nervosität in seiner Stimme war unüberhörbar, denn entgegen allen Regeln hatte Hilbert einen sehr gewagten Vortrag vorbereitet: Er wollte nicht über Dinge sprechen, die bereits bewiesen waren, sondern über die noch unbekannten Dinge und über seine Vision von der Zukunft der Mathematik. «Wer von uns würde nicht gerne den Schleier lüften, unter dem die Zukunft verborgen liegt, um einen Blick zu werfen auf die bevorstehenden Fortschritte unserer Wissenschaft und in die Geheimnisse ihrer Entwicklung während der künftigen Jahrhunderte?» Und so legte Hilbert zu Beginn des neuen Jahrhunderts seinen Zuhörern eine Liste von dreiundzwanzig Problemen vor, die er als richtungweisend für den Gang der Mathematik im zwanzigsten Jahrhundert einstufte.

Viele dieser Probleme fanden in den folgenden Jahrzehnten ihre Lösung, und die Entdecker dieser Lösungen gehören einem illustren Kreis von außergewöhnlichen Mathematikern an. Hierzu zählen Kurt Gödel, Henri Poincaré und viele andere Pioniere, deren Ideen die mathematische Landschaft geprägt haben. Doch auf Hilberts Liste gab es ein besonderes Problem – das achte Problem –, von dem es den Anschein hatte, als ob es ungelöst das Jahrhundert überleben sollte: die Riemannsche Vermutung.

Von allen Problemen auf seiner Liste lag Hilbert das achte besonders am Herzen. In Deutschland gibt es einen Mythos um den deutschen Kaiser Friedrich Barbarossa, der während des dritten Kreuzzugs ums Leben kam. Nach der Legende lebt Barbarossa jedoch immer noch, schlafend in einer Höhle im Kyffhäuser, doch erwachend aus seinem Schlaf, wenn Deutschland ihn braucht. Angeblich wurde Hilbert einmal gefragt: «Wenn Sie, ähnlich wie Barbarossa, nach fünfhundert Jahren wieder aufwachen dürften, was würden Sie dann machen?» Seine Antwort lautete: «Ich würde fragen, ob jemand die Riemannsche Vermutung gelöst hat.»

Als sich das zwanzigste Jahrhundert bereits seinem Ende zuneigte, hatten sich viele Mathematiker mit der Tatsache abgefunden, dass dieses Juwel unter den Hilbertschen Problemen nicht nur das Jahrhundert überleben würde, sondern vermutlich auch noch ungelöst wäre, wenn Hilbert tatsächlich aus seinem fünfhundertjährigen Schlaf erwachen sollte. Auf dem letzten Internationalen Mathematiker-Kongress des neunzehnten Jahrhunderts hatte Hilbert seine Zuhörer mit seinem revolutionären Vortrag über das Unbekannte in den Bann gezogen. Nun wartete eine Überraschung auf diejenigen Mathematiker, die den letzten Kongress dieses Jahrhunderts besuchen wollten.

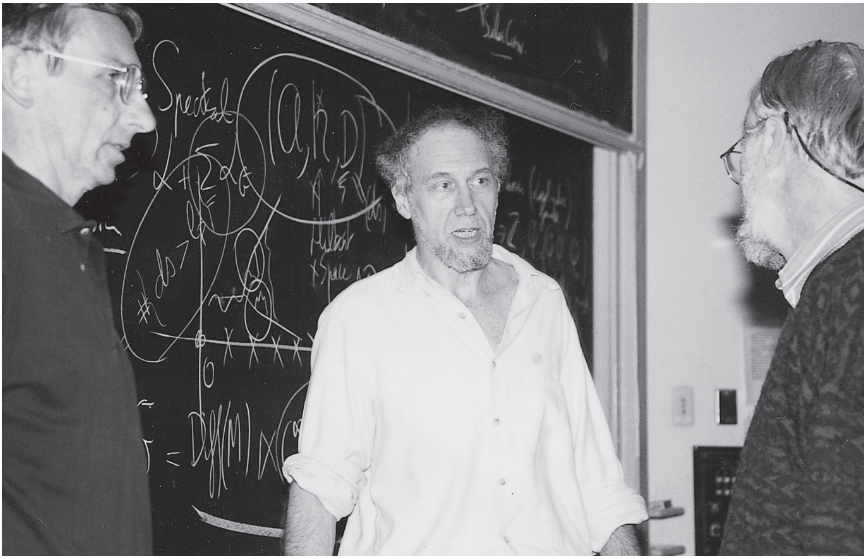
Am 7. April 1997 erschien auf den Computerbildschirmen der Mathematiker rund um die Welt eine außergewöhnliche Nachricht. Auf der Website des Internationalen Mathematiker-Kongresses, der ein Jahr später in Berlin stattfinden sollte, fand sich eine Ankündigung, der zufolge schließlich doch noch der Anspruch auf den Heiligen Gral der Mathematik erhoben wurde: Die Riemannsche Vermutung war bewiesen! Die Nachricht verfehlte ihre Wirkung nicht. Die Riemannsche Vermutung zählte zu den zentralen Problemen der gesamten Mathematik, und als die Mathematiker ihre E-Mails gelesen hatten, waren sie begeistert ob der Aussicht, eines der größten mathematischen Rätsel endlich verstehen zu können.

Die Ankündigung stammte von Professor Enrico Bombieri. Eine respektablere Quelle hätte man sich kaum denken können. Bombieri ist einer der Hüter der Riemannschen Vermutung und arbeitet an dem angesehenen Institute for Advanced Study in Princeton, einst auch Heimat von Einstein und Gödel. Bombieri spricht sehr leise und zurückhaltend, doch wann immer er etwas zu sagen hat, hören die Mathematiker aufmerksam zu.

Bombieri wuchs in Italien auf, und die Weinberge seiner wohlhabenden Familie vermittelten ihm den Geschmack für die guten Dinge im Leben. Seine Kollegen bezeichnen ihn liebevoll als den «Aristokraten» unter den Mathematikern. Seine elegante Erscheinung fiel insbesondere in seiner Jugend auf, und oft erschien er in teuren Sportwagen. Angeblich, und von ihm nie dementiert, belegte er einmal den sechsten Platz bei einer 24-Stunden-Rallye in Italien. Im Bereich der Mathematik waren seine Erfolge konkreter und brachten ihm schließlich in den siebziger Jahren einen Ruf nach Princeton ein, wo er seitdem auch geblieben ist. Die Vorliebe für Rallyes wich der Leidenschaft für die Malerei, insbesondere für Porträts.

Seinen Ruf verdankt Bombieri jedoch seiner kreativen Art, Mathematik zu betreiben, insbesondere seinen Beiträgen zur Riemannschen Vermutung. Seit er mit frühreifen fünfzehn Jahren zum ersten Mal über die Riemannsche Vermutung gelesen hatte, ließ ihn diese Herausforderung nicht mehr los. In der umfangreichen Bibliothek seines Vaters, eines Wirtschaftswissenschaftlers, stöberte er gerne in den Mathematikbüchern, und die Eigenschaften von Zahlen hatten ihn immer schon fasziniert. So fand er bald heraus, dass die Riemannsche Vermutung als das grundlegendste Problem der Zahlentheorie angesehen wurde. Seine Leidenschaft für das Problem verstärkte sich noch durch ein Angebot seines Vaters: Sollte Enrico das Problem lösen, würde ihm sein Vater einen Ferrari schenken. Ganz nebenbei erhoffte sich sein Vater dadurch auch, dass Enrico sich nicht immer nur seinen eigenen Ferrari ausleihen würde.

Bombieris E-Mail war zu entnehmen, dass man ihn um diesen Preis gebracht hatte. «Seit dem Vortrag von Alain Connes letzten Mittwoch am IAS hat es eine fantastische Entwicklung gegeben», begann Bombieri. Einige Jahre zuvor hatte die Nachricht, dass Alain Connes sich der Lösung der Riemannschen Vermutung zugewandt hatte, in der Welt der Mathematik für einige Aufregung gesorgt. Connes zählt zu den Revolutionären auf diesem Gebiet, gewissermaßen ein Robespierre der Mathematik, demgegenüber man Bombieri eher mit Ludwig XVI. vergleichen könnte. Sein Charisma ist außergewöhnlich, und seine lebhafte Art steht in krassem Widerspruch zu dem klassischen Bild des nüchternen, peniblen Mathematikers. Er strahlt den Elan eines Fanatikers aus, der von seiner Weltsicht



Alain Connes (Mitte), Professor am Institut des Hautes Études Scientifique und am Collège de France

überzeugt ist, und seine Vorträge wirken auf seine Zuhörer geradezu elektrisierend. Unter seinen Anhängern genießt er deshalb fast Kultstatus. Mit Begeisterung würden sie ihn sofort gegen jeden Gegenangriff seitens des Ancien Régime der festgefahrenen Überzeugungen verteidigen.

Connes arbeitet am Institut des Hautes Études Scientifiques in Paris, der französischen Antwort auf das Institut in Princeton. Seit er im Jahre 1979 dort seine Stelle antrat, hat er eine vollkommen neue Sprache zur Formulierung von Geometrie entwickelt. Er zögert nicht, in die entferntesten Bereiche des Abstrakten vorzustoßen. Selbst die Mehrzahl der Mathematiker, die sich ihrer hochgradig formalen Sichtweise der Welt für gewöhnlich durchaus bewusst sind, sträubte sich lange gegen die abstrakte Revolution von Connes. Und doch konnte er schließlich auch diejenigen überzeugen, die eine solch starre Theorie für überflüssig hielten, denn seine neue Sprache der Geometrie besitzt auch Verbindungen zur Welt der Quantenphysik. Wenn trotzdem noch viele Mathematiker gegen diese Sprache eine Aversion empfinden, so lässt sich dies eben nicht ändern.

Connes gewagte Vermutung, seine neue Geometrie könnte nicht nur die Welt der Quantenphysik aufhellen, sondern auch die Riemannsche

Vermutung – das größte Rätsel der Zahlen–, wurde zunächst mit Überraschung und sogar schockiert aufgenommen. Seine Abneigung gegen konventionelle Schranken konnte kaum deutlicher als darin zum Ausdruck kommen, dass er sich ohne Umwege geradewegs in das Zentrum der Zahlentheorie begab und direkt das schwierigste der ungelösten Probleme der Mathematik anging. Seit Connes in den achtziger Jahren diese Bühne betreten hatte, lag allerdings die Vermutung im Raum, dass dieses bekanntermaßen schwierige Problem, wenn überhaupt, dann nur von Alain Connes gelöst werden könnte.

Doch das letzte Stück des Puzzles schien nicht von Connes gefunden worden zu sein. Bombieri schrieb, dass ein junger Physiker im Publikum «schlagartig» erkannt habe, wie er seine bizarre Welt der «supersymmetrischen Fermion-Boson-Systeme» zur Lösung der Riemannschen Vermutung einsetzen könne. Die wenigsten Mathematiker konnten mit diesem Wirrwarr aus Schlagwörtern etwas anfangen, doch Bombieri erklärte, dass es sich hierbei um die «Physik eines Gemischs aus Anyonen und Moronen mit entgegengesetzten Vorzeichen in der Nähe des absoluten Nullpunkts handelte». Auch das klang immer noch seltsam, doch andererseits handelte es sich schließlich um die Lösung des schwierigsten Problems in der Geschichte der Mathematik, und niemand konnte eine einfache Lösung erwarten. Bombieri fuhr in seiner Mitteilung fort, der junge Physiker habe nach sechs Tagen ununterbrochener Arbeit und mithilfe einer neuen Computersprache namens MISPAR schließlich das härteste Problem der Mathematik geknackt.

Bombieri schloss seine E-Mail mit den Worten: «Wow! Bitte sorgt für eine möglichst weite Verbreitung.» Obwohl es sicherlich außergewöhnlich war, dass ein junger Physiker schließlich die Riemannsche Vermutung bewiesen haben sollte, so war es doch keine völlige Überraschung. In den vergangenen Jahrzehnten hatte sich von einigen Bereichen der Mathematik herausgestellt, dass sie mit grundlegenden Problemen der Physik zusammenhingen. Auch wenn es sich bei der Riemannschen Vermutung um ein Problem aus der Zahlentheorie handelte, so hatte man schon seit Jahren interessante Verbindungen zu Problemen aus der Teilchenphysik vermutet.

Viele Mathematiker änderten ihre Reisepläne und flogen nach Princeton, um bei dem entscheidenden Augenblick dabei zu sein. Noch gut erinnerte man sich an die Begeisterung, als einige Jahre zuvor der englische Mathematiker Andrew Wiles einen Beweis für das letzte Fermatsche Theorem angekündigt hatte. Wiles hatte Fermats Behauptung beweisen können: Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ hat für n größer als 2 keine ganzzahligen Lösungen. Als Wiles nach seinem Vortrag in Cambridge im Juni 1993 die Kreide niederlegte, knallten die Sektkorken, und die Kameras blitzten.

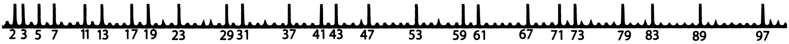
Aber den Mathematikern war bewusst, dass ein Beweis der Riemannschen Vermutung auf die Zukunft der Mathematik weitaus größeren Einfluss haben würde als das Wissen, dass die Fermatsche Gleichung keine Lösungen hat. Wie Bombieri bereits mit fünfzehn Jahren festgestellt hatte, geht es bei der Riemannschen Vermutung um die grundlegendsten Objekte in der Mathematik – die Primzahlen.

Primzahlen sind gleichsam die Atome der Arithmetik. Bei den Primzahlen handelt es sich um solche unteilbaren Zahlen, die sich nicht als das Produkt von zwei kleineren Zahlen schreiben lassen. Die Zahlen 13 und 17 beispielsweise sind Primzahlen. Die Zahl 15 ist keine Primzahl, da sie sich als 3 mal 5 schreiben lässt. Wie Juwelen liegen die Primzahlen verstreut in den unendlichen Weiten des Zahlenuniversums, das von den Mathematikern über viele Jahrhunderte hinweg untersucht wurde. Für Mathematiker haben sie etwas Wunderbares: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, … – zeitlose Zahlen aus irgendeiner Welt außerhalb unserer physikalischen Realität. Sie sind das Geschenk der Natur an den Mathematiker.

Ihre Bedeutung gewinnen die Primzahlen für den Mathematiker als Bausteine aller anderen Zahlen. Jede Zahl, die keine Primzahl ist, lässt sich als Produkt dieser unteilbaren Bausteine zusammensetzen. Jedes Molekül in der physikalischen Welt lässt sich aus den Atomen eines Periodensystems von chemischen Elementen zusammensetzen. Eine Liste der Primzahlen ist quasi das Periodensystem des Mathematikers. Die Primzahlen 2, 3 und 5 entsprechen im Laboratorium des Mathematikers den Elementen Wasserstoff, Helium und Lithium. Diese Bausteine besser verstehen zu können, birgt für den Mathematiker die Hoffnung, neue Wege durch die erdrückende Komplexität der Welt der Mathematik finden zu können.

Trotz ihrer scheinbaren Einfachheit und ihres grundlegenden Charakters bleiben die Primzahlen die geheimnisvollsten Objekte, die von den Mathematikern untersucht werden. Wenn es um das Auffinden von Mustern und Ordnung geht, stellen die Primzahlen eine nicht mehr zu übertreffende Herausforderung dar. Es ist unmöglich, für eine Liste von Primzahlen vorherzusagen, wann die nächste Primzahl auftauchen wird. Die

Liste erscheint chaotisch, zufällig, und es gibt keinerlei Hinweise, wie man die nächste Zahl bestimmen könnte. Die Liste der Primzahlen ist der Herzschlag der Mathematik, doch dieser Puls scheint von einem stark koffeinhaltigen Cocktail angetrieben zu werden:



Die Primzahlen bis 100 – der unregelmäßige Herzschlag im Fundament der Mathematik

Gibt es eine Formel, mit der sich die Zahlen auf dieser Liste erzeugen lassen; irgendeine magische Vorschrift, mit der sich bestimmen lässt, was die 100. Primzahl ist? Diese Frage hat die mathematischen Gemüter seit jeher bewegt. Doch auch nach zweitausend Jahren intensivster Suche entziehen sich die Primzahlen allen Versuchen, in ihnen irgendwelche einfachen Muster zu entdecken. Generationen von Mathematikern haben den Primzahltrommeln gelauscht: zwei Schläge, drei Schläge, fünf, sieben, elf. Und während man diese Schläge vernimmt, gewinnt man den Eindruck, irgendeinem weißen Rauschen zu lauschen, jedoch ohne innere Logik. Im Herzen der Mathematik, an der Wurzel der Ordnung, können die Mathematiker nur den Klang des Chaos vernehmen.

Es fällt den Mathematikern schwer zuzugeben, dass es möglicherweise schlicht keine Erklärung geben könnte für die Art, wie die Natur die Primzahlen ausgewählt hat. Gäbe es in der Mathematik keine Struktur, keine schöne Einfachheit, lohnte es sich nicht, sie zu studieren. Dem Klang von weißem Rauschen wird man selten hingebungsvoll zuhören können. Der französische Mathematiker Henri Poincaré schrieb dazu: «Der Wissenschaftler beschäftigt sich nicht mit der Natur, weil sie nützlich ist; er beschäftigt sich mit ihr, weil es ihm Spaß macht, und es macht ihm Spaß, weil sie schön ist. Wäre die Natur nicht schön, wäre es nicht wert, sie zu kennen, und wenn es nicht wert wäre, die Natur zu kennen, wäre das Leben nicht lebenswert.»

Man könnte vielleicht hoffen, dass sich der Pulsschlag der Primzahlen nach einem sprunghaften Anfang langsam beruhigt. Mitnichten – es scheint sogar umso schlimmer zu werden, je weiter man zählt. Wir betrachten die Primzahlen auf beiden Seiten von 10.000.000 innerhalb eines Intervalls von 100 Zahlen. Zunächst unterhalb von 10.000.000:

9.999.901, 9.999.907, 9.999.929, 9.999.931, 9.999.937, 9.999.943, 9.999.971, 9.999.973, 9.999.991

Dies vergleiche man mit den wenigen Primzahlen innerhalb von 100 Zahlen oberhalb von 10.000.000:

10.000.019, 10.000.079

Man kann sich nur schwer eine Formel vorstellen, die solche Strukturen erzeugt. Tatsächlich gleicht die Primzahlfolge eher einer Zufallsfolge von Zahlen als einer geordneten Struktur. Ebenso wenig, wie man nach den ersten 99 Würfen einer Münze das Ergebnis des 100. Wurfes vorhersagen kann, scheinen auch die Primzahlen sich jeder Vorhersage zu entziehen.

Für den Mathematiker liegt in den Primzahlen eine sehr seltsame Spannung. Auf der einen Seite ist eine Zahl entweder eine Primzahl, oder sie ist es nicht. Kein Wurf einer Münze macht aus einer Primzahl plötzlich eine Zahl, die durch eine kleinere Zahl teilbar ist. Und doch besteht kein Zweifel daran, dass die Liste der Primzahlen wie eine Zufallsfolge von Zahlen erscheint. Die Physiker haben sich an die Idee gewöhnt, dass ein Quantenwürfel das Schicksal des Universums entscheiden kann und bei jedem Wurf zufällig entscheidet, an welchen Orten die Wissenschaftler auf Materie treffen werden. Doch für einen Mathematiker wäre es mehr als unbefriedigend, zugeben zu müssen, dass diese für die Mathematik so grundlegenden Zahlen von der Natur im Verfahren zufälliger Münzwürfe bestimmt wurden. Zufall und Chaos sind dem Mathematiker einfach ein Gräuel.

Trotz ihrer scheinbaren Zufälligkeit haben die Primzahlen mehr als jeder andere Teil unseres mathematischen Erbes einen zeitlosen und universellen Charakter. Primzahlen gäbe es auch, wenn uns die Evolution nicht zu dem Punkt gebracht hätte, wo wir sie als solche auch erkennen können. In seinem berühmten Buch *A Mathematician's Apology* schreibt G. H. Hardy: «Die Zahl 317 ist nicht deshalb eine Primzahl, weil wir sie für eine Primzahl halten oder weil unser Geist in einer bestimmten Art und Weise arbeitet, sondern *weil es so ist*, weil die mathematische Realität so aufgebaut ist.»

Einige Philosophen mögen diese platonische Weltsicht anzweifeln, diesen Glauben an eine absolute und zeitlose Wirklichkeit jenseits der menschlichen Existenz, doch für mich macht gerade das sie zu Philosophen und nicht zu Mathematikern. Es gibt einen faszinierenden Dialog zwischen Alain Connes, dem Mathematiker aus Bombieris E-Mail, und dem Neurobiologen Jean-Pierre Changeux in dem Buch *Conversations on Mind, Matter and Mathematics*. Die Spannung dieses Buchs wird greifbar, als der Mathematiker für die Existenz einer Mathematik außerhalb unseres Geistes plädiert, während der Neurologe jede solche Vorstellung zurückweist. «Weshalb sehen wir nicht «$\pi = 3{,}1416$» in goldenen Buchstaben am Himmel oder «$6{,}02 \times 10^{23}$» in den Spiegelungen einer Glaskugel?», argumentiert Changeux gegen Connes Auffassung, dass «es unabhängig von einem menschlichen Geist eine grundlegende und unveränderliche mathematische Realität gebe» und dass wir im Zentrum dieser Welt auch eine unveränderbare Liste der Primzahlen finden. Die Mathematik ist nach Connes «zweifelsfrei die einzige *universelle* Sprache». Man kann sich in anderen Bereichen dieses Universums eine andere Chemie und eine andere Biologie vorstellen, doch die Primzahlen werden überall Primzahlen sein, in welcher Galaxie auch immer gerechnet wird.

In dem Klassiker *Contact* von Carl Sagan versuchen fremde intelligente Wesen mithilfe der Primzahlen einen Kontakt zum Leben auf der Erde herzustellen. Ellie Arroway, die Heldin des Buches, arbeitet für das Projekt SETI, die Suche nach Extraterrestrischer Intelligenz. Im Rahmen dieses Projekts werden die unterschiedlichsten Geräusche aus dem Kosmos analysiert. Eines Nachts ist das Radioteleskop auf Vega gerichtet, und plötzlich vernehmen die Forscher ein seltsames Klopfen inmitten des Hintergrundrauschens. Ellie erkennt sofort die Trommelschläge in diesem Radiosignal. Nach zwei Schlägen folgt eine Pause, dann nach drei Schlägen, nach fünf, sieben, elf und so weiter – sämtliche Primzahlen bis 907. Dann beginnt alles wieder von vorne.

Diese kosmische Trommel spielte eine Musik, die von den Erdbewohnern wiedererkannt werden musste. Ellie ist überzeugt, dass die Schläge nur von intelligentem Leben stammen können: «Es ist schwer vorstellbar, dass irgendein Plasma eine solch reguläre Folge von mathematischen Signalen ausstrahlen könnte. Die Primzahlen sollen unsere Aufmerksamkeit erregen.» Hätten die fremden Wesen die Gewinnzahlen der letzten zehn Jahre irgendeiner kosmischen Lotterie übermittelt, hätte Ellie sie nie von dem Hintergrundrauschen unterscheiden können. Obwohl die Liste der Primzahlen ebenso zufällig erscheint wie eine Liste von Gewinnzahlen, so war es doch die universelle Konstanz der Primzahlen, die jede einzelne

Zahl in dieser Nachricht festlegte. Hinter dieser Regelmäßigkeit erkennt Ellie also die Anzeichen für intelligentes Leben.

Kommunikation vermittels Primzahlen ist keine reine Sciencefiction. Oliver Sacks beschreibt in seinem Buch *Der Mann, der seine Frau mit einem Hut verwechselte* die sechsundzwanzigjährigen Zwillingsbrüder John und Michael, deren tiefste Form der Kommunikation im Austausch von sechsstelligen Primzahlen lag. Sacks erzählt, wie er die beiden zum ersten Mal in einer Zimmerecke entdeckte und wie sie sich verstohlen gegenseitig Zahlen vorsagten: «… anfangs erschienen sie mir wie zwei Weinkenner, die besondere Geschmackserfahrungen austauschen.» Sacks hat zunächst keine Ahnung von dem Treiben der beiden. Doch nachdem er ihren Code geknackt hat, lernt er einige achtstellige Primzahlen auswendig und lässt sie bei ihrem nächsten Treffen wie zufällig in die Unterredung einfließen. Der Überraschung der Zwillinge folgte eine tiefe Konzentration, die schließlich in Jubel umschlägt, als sie eine weitere Primzahl erkennen. Sacks hatte seine Primzahlen einer Tabelle entnommen, doch wie die Zwillinge ihre Primzahlen fanden, blieb ein verblüffendes Rätsel. Konnte es sein, dass diese Autisten mit ihrer Sonderbegabung im Besitz einer geheimen Formel waren, nach der viele Generationen von Mathematikern vergeblich gesucht haben?

Die Geschichte dieser Zwillinge beeindruckte Bombieri besonders.

> Es fällt mir schwer, diese Geschichte zu hören, ohne eine gewisse Ehrfurcht und ein Erstaunen für die Arbeitsweise des Gehirns zu empfinden. Doch ich frage mich, ob meine nichtmathematischen Freunde ähnlich reagieren? Haben sie auch nur die leiseste Ahnung, wie bizarr, ungeheuerlich und sogar außerirdisch dieses einzigartige Talent war, deren sich die Zwillinge so natürlich erfreuten? Sind sie sich bewusst, dass die Mathematiker seit Jahrhunderten nach einer Möglichkeit suchen, das zu tun, was für John und Michael so selbstverständlich war: das Berechnen und Erkennen von Primzahlen?

Bevor irgendjemand herausfinden konnte, wie die Zwillinge ihr Wunder vollbrachten, wurden sie im Alter von siebenunddreißig Jahren von ihren Ärzten getrennt. Die Ärzte waren der Meinung, ihre private numerologische Sprache stünde der Entwicklung der Zwillinge im Weg. Würden dieselben Ärzte den geheimnisvollen Unterredungen bei Mathematiker-Seminaren an manchen Universitäten zuhören, würden sie vermutlich in ähnlicher Weise die Schließung dieser Institute vorschlagen.

Es ist sehr wahrscheinlich, dass die Zwillinge bei der Überprüfung, ob es sich bei ihren Zahlen um Primzahlen handelte, einen Trick verwendet haben, der auf Fermats kleinem Theorem beruht. Mit einem ähnlichen Test können Autisten beispielsweise auch sehr rasch herausfinden, dass der 13. April 1922 ein Donnerstag war. Diesen Spaß erlaubten sich die Zwillinge regelmäßig bei Talk-Shows im Fernsehen. Beide Tricks beruhen auf etwas, das man als modulare Arithmetik oder Modularrechnung bezeichnet. Doch selbst wenn die Zwillinge keine magische Formel für Primzahlen besaßen, war ihre Fähigkeit doch außergewöhnlich. Bevor man sie voneinander trennte, hatten sie schon zwanzigstellige Zahlen erreicht, was weit jenseits der Primzahltabelle von Sacks lag.

So wie Sagans Heldin gebannt auf die kosmischen Primzahlschläge hört oder so wie Sacks versucht, den Primzahl-Zwillingen etwas abzulauschen, so haben sich die Mathematiker seit Jahrhunderten bemüht, eine gewisse Melodie hinter diesem Geräusch zu vernehmen. Westliche Ohren empfinden oft keine Harmonie in östlicher Musik, und ganz ähnlich schien es lange Zeit auch den Mathematikern zu ergehen. Mitte des neunzehnten Jahrhunderts kam es jedoch zu einem wesentlichen Durchbruch. Bernhard Riemann untersuchte das Problem aus einer völlig neuen Perspektive und erkannte so einige der Muster, die für das Chaos der Primzahlen verantwortlich sind. Dem oberflächlichen Rauschen der Primzahlen lag tatsächlich eine subtile und unerwartete Harmonie zugrunde. Trotz dieses großen Schritts blieben viele Geheimnisse dieser neuen Musik immer noch außer Hörweite. Riemann, der Richard Wagner der mathematischen Welt, ließ sich davon jedoch nicht abschrecken. Er stellte eine gewagte Vermutung über die geheimnisvolle Musik auf, die er entdeckt hatte. Dies wurde später die so genannte Riemannsche Vermutung. Wer auch immer beweisen wird, dass Riemann die Natur dieser Musik richtig eingeschätzt hatte, wird damit auch die Erklärung gefunden haben, weshalb die Primzahlen einen solch überzeugenden Eindruck von Zufälligkeit vermitteln.

Riemanns Einsicht folgte seiner Entdeckung eines mathematischen Spiegels, durch den er die Primzahlen betrachten konnte. In der Welt von Alice, der Heldin in Lewis Carrolls Erzählung *Alice hinter den Spiegeln*, waren rechts und links vertauscht, als Alice durch den Spiegel trat. Demgegenüber wurde in der mathematischen Welt, die Riemann durch seinen Spiegel beobachtete, das Chaos der Primzahlen zu einem Muster, dessen Ordnung sich ein Mathematiker kaum vollkommener vorstellen konnte.

Er vermutete, dass diese Ordnung für immer erhalten blieb, wie weit auch immer man in die niemals endende Welt hinter dem Spiegel vordringen würde. Riemanns Vorhersage einer inneren Harmonie auf der anderen Seite des Spiegels würde das chaotische Verhalten der Primzahlen erklären. Die Metamorphose hinter Riemanns Spiegel, wo sich das Chaos zur Ordnung wandelt, grenzt für die meisten Mathematiker an ein Wunder. So hinterließ Riemann der mathematischen Welt eine Herausforderung: Man beweise, dass die von ihm entdeckte Ordnung tatsächlich vorhanden sei.

Bombieris E-Mail vom 7. April 1997 versprach also den Beginn eines neuen Zeitalters. Riemanns Einsicht beruhte auf keiner bloßen Luftspiegelung. Der Aristokrat der Mathematik hatte den Mathematikern eine Erklärung für das scheinbare Chaos im Auftreten der Primzahlen in Aussicht gestellt. Und nun wollten sie in jedem Fall die anderen Schätze plündern, die durch die Lösung dieses großen Problems an den Tag gefördert werden würden.

Eine Lösung der Riemannschen Vermutung hätte weitreichende Auswirkungen auf viele andere mathematische Probleme. Die Primzahlen sind für den Mathematiker von so großer Bedeutung, dass jeder Durchbruch und jedes bessere Verständnis ihrer Natur von grundlegender Bedeutung sind. Die Riemannsche Vermutung scheint sich jedenfalls nicht umgehen zu lassen. Wie auch immer die Mathematiker sich ihren Weg durch das Gebiet der Mathematik bahnen, früher oder später scheinen alle Wege auf diese zentrale Kreuzung zu treffen.

Viele Leute haben die Riemannsche Vermutung mit der Ersteigung des Mount Everest verglichen. Je länger ein Berg unbestiegen bleibt, umso mehr drängt es uns nach seiner Eroberung. Und der Mathematiker, der den Mount Riemann als Erster erklommen haben wird, bleibt sicherlich länger in der Erinnerung als Edmund Hillary. Die Eroberung des Mount Everest wird nicht deshalb bestaunt, weil der Gipfel ein besonders schöner Ort wäre, sondern wegen der Herausforderungen, die mit seiner Besteigung verbunden sind. In dieser Hinsicht unterscheidet sich die Riemannsche Vermutung wesentlich von der Besteigung der welthöchsten Bergspitze. Wir alle wollen auf den Gipfel des Mount Riemann, weil uns dort ein unbeschreibliches Panorama erwartet. Die Person, die schließlich die Riemannsche Vermutung beweisen wird, füllt die Lücken in Tausenden von Theoremen, die auf der Richtigkeit der Riemannschen Vermutung