

CARL HANSER VERLAG

Wolfgang Preuß, Günter Wenisch

**Lehr- und Übungsbuch Mathematik**  
Band 3: Lineare Algebra - Stochastik

3-446-21682-0

[www.hanser.de](http://www.hanser.de)

# Inhaltsverzeichnis

<b>Analytische Geometrie und lineare Algebra</b> . . . . .	12
<b>1 Geometrie im Raum mit Vektoren</b> . . . . .	12
1.1 Punkte und Geraden . . . . .	12
1.1.1 Punkte . . . . .	12
1.1.2 Geraden . . . . .	12
1.1.3 Punkte und Vektoren . . . . .	14
1.2 Ebene und räumliche Figuren in Vektordarstellung . . . . .	14
1.2.1 Rechengesetze . . . . .	15
1.2.2 Linearkombinationen . . . . .	15
Aufgaben 1.1 bis 1.5 . . . . .	17
1.3 Ebenen im Raum . . . . .	18
1.3.1 Definition der Ebenengleichung . . . . .	18
1.3.2 Parameter als Koordinaten in einer Ebene . . . . .	18
1.3.3 Koordinaten im Raum . . . . .	19
1.3.4 Komplanare und kollineare Vektoren . . . . .	22
Aufgaben 1.6 bis 1.13 . . . . .	24
1.4 Lage von Punkten, Geraden und Ebenen zueinander . . . . .	25
1.4.1 Rechnerische Untersuchung der Lage von Geraden und Ebenen . . . . .	26
1.4.2 Koordinatenform der Ebenengleichung . . . . .	28
Aufgaben 1.14 bis 1.20 . . . . .	30
1.5 Abstände und Winkel zwischen Vektoren, Geraden und Ebenen . . . . .	31
1.5.1 Längen von Vektoren . . . . .	31
1.5.2 Orthogonale Vektoren . . . . .	33
1.5.3 Definition des Skalarprodukts . . . . .	34
1.5.4 Winkelberechnung . . . . .	36
1.5.5 Anwendung des Skalarprodukts . . . . .	37
Aufgaben 1.21 bis 1.33 . . . . .	39
1.6 Volumina und senkrechte Vektoren . . . . .	41
1.6.1 Definition des Vektorprodukts . . . . .	41
1.6.2 Flächen- und Volumenberechnung mit dem Vektorprodukt . . . . .	43
1.6.3 Eigenschaften des Vektorprodukts . . . . .	44
1.6.4 Anwendung des Vektorprodukts zur Berechnung von Abständen . . . . .	45
Aufgaben 1.34 bis 1.44 . . . . .	47
<b>2 Matrizen und Determinanten</b> . . . . .	49
2.1 Matrizenrechnung . . . . .	49
2.1.1 Definitionen und Bezeichnungen . . . . .	51
2.1.2 Addition und skalare Multiplikation von Matrizen . . . . .	53
2.1.3 Matrizenmultiplikation . . . . .	56
2.1.4 Bemerkungen zur Matrizenmultiplikation . . . . .	57
2.1.5 Rechenregeln für die Matrizenmultiplikation . . . . .	58

2.1.6	Spezielle Matrizen . . . . .	58
	Aufgaben 2.1 bis 2.5 . . . . .	59
2.2	Matrixinversion . . . . .	61
2.2.1	Inversion quadratischer Matrizen . . . . .	61
2.2.2	Definition der inversen Matrix . . . . .	62
2.2.3	Beispiele invertierbarer Matrizen . . . . .	63
	Aufgaben 2.6 bis 2.9 . . . . .	67
2.3	Rang einer Matrix. Lineare Unabhängigkeit von Zeilen und Spalten . . . . .	69
2.3.1	Der Rang einer $(m \times n)$ -Matrix . . . . .	71
2.3.2	Lineare Unabhängigkeit von Zeilen und Spalten . . . . .	75
	Aufgaben 2.10 bis 2.12 . . . . .	78
2.4	Determinanten . . . . .	79
2.4.1	Anschauliche Bedeutung der Determinante einer Matrix . . . . .	79
2.4.2	Definition und Eigenschaften von Determinanten . . . . .	82
2.4.3	Eigenschaften der Funktion $\det : \mathbf{C}^{m \times m} \rightarrow \mathbf{C}$ . . . . .	82
2.4.4	Berechnung von Determinanten . . . . .	83
	Aufgaben 2.13 bis 2.16 . . . . .	87
<b>3</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b> . . . . .	<b>90</b>
3.1	Einleitung . . . . .	90
3.1.1	Lineare Gleichungssysteme in der Geometrie . . . . .	90
3.1.2	Lineare Gleichungssysteme in der Technik . . . . .	94
	Aufgaben 3.1 bis 3.3 . . . . .	95
3.2	Lösung linearer Gleichungssysteme . . . . .	96
3.2.1	Definition eines linearen $(m \times n)$ -Gleichungssystems. Matrixschreibweise. . . . .	96
3.2.2	Eliminationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme . . . . .	97
3.2.3	Einsatz von Rechnerprogrammen . . . . .	101
3.2.4	Inversion von Matrizen . . . . .	101
	Aufgaben 3.4 bis 3.12 . . . . .	102
3.3	Determinanten und lineare Gleichungssysteme . . . . .	103
3.3.1	Lösungsformel bei invertierbarer Koeffizientenmatrix . . . . .	103
	Aufgaben 3.13 und 3.14 . . . . .	105
<b>4</b>	<b>Eigenwerte</b> . . . . .	<b>106</b>
4.1	Einleitung . . . . .	106
4.1.1	Einführendes Beispiel . . . . .	106
4.1.2	Die Matrixgleichung $T^{-1}MT = D$ . . . . .	107
	Aufgaben 4.1 bis 4.4 . . . . .	108
4.2	Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	109
4.2.1	Definition und Eigenschaften von Eigenwerten und -vektoren . . . . .	109
	Aufgaben 4.5 bis 4.7 . . . . .	110
4.3	Berechnung von Eigenwerten . . . . .	111
4.3.1	Das charakteristische Polynom . . . . .	111
4.3.2	Diagonalisierbarkeit . . . . .	113
	Aufgaben 4.8 bis 4.13 . . . . .	114

<b>5</b>	<b>Bemerkungen zu linearen Ungleichungen</b> . . . . .	116
5.1	Einführung . . . . .	116
5.1.1	Lineare Ungleichungen . . . . .	116
	Aufgaben 5.1 bis 5.3 . . . . .	119
5.2	Ausblick auf die lineare Optimierung . . . . .	119
5.2.1	Allgemeines lineares Optimierungsproblem . . . . .	119
5.2.2	Basislösungen . . . . .	120
	Aufgabe 5.4 . . . . .	121
	<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik</b> . . . . .	122
<b>6</b>	<b>Einleitung</b> . . . . .	122
	Aufgaben 6.1 bis 6.5 . . . . .	125
<b>7</b>	<b>Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung</b> . . . . .	126
7.1	Ereignisfeld und Wahrscheinlichkeitsraum . . . . .	126
	Aufgaben 7.1 und 7.2 . . . . .	129
7.2	Beispiele und Aufgaben . . . . .	131
	Aufgaben 7.3 bis 7.8 . . . . .	137
<b>8</b>	<b>Zwei wichtige Spezialfälle von Wahrscheinlichkeitsräumen</b> . . . . .	139
8.1	Wahrscheinlichkeitsverteilung gemäß Gaußscher Glockenkurve . . . . .	139
8.2	Diskrete Gleichverteilung . . . . .	142
<b>9</b>	<b>Berechnung von Wahrscheinlichkeiten durch kombinatorische Überlegungen</b> . . . . .	145
9.1	Kombinatorik (Ermittlung von Anzahlen) . . . . .	145
9.1.1	Fundamentalprinzip der Kombinatorik . . . . .	145
9.1.2	Geordnete Proben ohne Wiederholung . . . . .	146
9.1.3	Entnahme von Teilmengen ohne Beachtung der Reihenfolge . . . . .	147
9.1.4	Zerlegung in Teilmengen ohne Beachtung der Reihenfolge . . . . .	147
9.2	Hypergeometrische Verteilung $H(N, M, n)$ . . . . .	148
	Aufgaben 9.1 bis 9.3 . . . . .	148
9.3	Weitere Aufgaben . . . . .	150
	Aufgaben 9.4 bis 9.11 . . . . .	150
<b>10</b>	<b>Zufallsgrößen und Verteilungsfunktionen</b> . . . . .	152
10.1	Diskrete und stetige Zufallsgrößen . . . . .	152
	Aufgabe 10.1 . . . . .	154
10.1.1	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße . . . . .	154
10.1.2	Bernoulli-Schema und Binomialverteilung $B(n, p)$ . . . . .	155
10.1.3	Grenzwertsatz von Poisson – Poisson-Verteilung $\Pi(\lambda)$ . . . . .	158
10.2	Verteilungsfunktionen . . . . .	160
10.2.1	Allgemeine Eigenschaften . . . . .	160
	Aufgabe 10.2 . . . . .	164
10.2.2	Diskrete Gleichverteilung . . . . .	164

10.2.3	Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ . . . . .	166
	Aufgaben 10.3 bis 10.7 . . . . .	167
10.2.4	Rechteckverteilung $R(a, b)$ . . . . .	169
10.2.5	Exponentialverteilung $E(\lambda)$ . . . . .	170
	Aufgabe 10.8 . . . . .	171
10.2.6	Weibull-Verteilung $W(\gamma, r)$ . . . . .	172
	Aufgaben 10.9 und 10.10 . . . . .	173
10.2.7	Nichtnegative Zahlenfolgen und Funktionen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	173
10.2.8	Weitere Aufgaben . . . . .	174
	Aufgaben 10.11 bis 10.22 . . . . .	174
<b>11</b>	<b>Momente einer Verteilung – Erwartungswert und Streuung</b> . . . . .	<b>177</b>
11.1	Allgemeines – Cauchy-Verteilung . . . . .	177
11.2	Erwartungswert und Streuung . . . . .	179
11.3	Schiefe und Exzeß . . . . .	182
11.4	Tschebyschew-Ungleichung . . . . .	184
	Aufgaben 11.1 bis 11.4 . . . . .	185
11.5	Rechenregeln für Erwartungswert und Streuung summierter Zufallsgrößen . . . . .	185
	Aufgabe 11.5 . . . . .	187
11.6	Charakteristische Funktionen . . . . .	188
11.7	Weitere Aufgaben . . . . .	190
	Aufgaben 11.6 bis 11.8 . . . . .	190
<b>12</b>	<b>Zusammenfassendes Beispiel mit einer Lebensdauerverteilung (Rayleigh-Verteilung)</b> . . . . .	<b>191</b>
<b>13</b>	<b>Stochastische Unabhängigkeit – bedingte Wahrscheinlichkeiten</b> . . . . .	<b>194</b>
13.1	Multiplikationssatz . . . . .	194
13.2	Formel der totalen Wahrscheinlichkeit – Bayessche Formel . . . . .	197
13.3	Weitere Beispiele und Aufgaben . . . . .	199
	Aufgaben 13.1 bis 13.21 . . . . .	200
<b>14</b>	<b>Der zentrale Grenzwertsatz</b> . . . . .	<b>204</b>
14.1	Der zentrale Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace . . . . .	205
14.2	Allgemeinere Fassung des zentralen Grenzwertsatzes . . . . .	208
14.3	Aufgaben . . . . .	209
	Aufgaben 14.1 bis 14.7 . . . . .	209
<b>15</b>	<b>Funktionen von Zufallsgrößen</b> . . . . .	<b>211</b>
15.1	Verteilung einer Summe oder einer Differenz von Zufallsgrößen (Faltung) . . . . .	211
	Aufgaben 15.1 bis 15.4 . . . . .	212
15.2	Verteilung eines Produkts oder eines Quotienten von Zufallsgrößen . . . . .	213
	Aufgaben 15.5 bis 15.7 . . . . .	215
15.3	Gemischte Aufgaben . . . . .	215
	Aufgaben 15.8 bis 15.13 . . . . .	215

<b>16</b>	<b>Mehrdimensionale Verteilungen</b> . . . . .	217
16.1	Zufällige Vektoren und Randverteilungen . . . . .	217
	Aufgaben 16.1 bis 16.3 . . . . .	220
16.2	Korrelationskoeffizient und Unabhängigkeit von Zufallsgrößen . . . . .	220
	Aufgabe 16.4 . . . . .	222
16.3	Regressionsgerade (Methode der kleinsten Quadrate) . . . . .	224
16.4	Gemischte Aufgaben . . . . .	227
	Aufgaben 16.5 bis 16.13 . . . . .	227
<b>17</b>	<b>Grundbegriffe der deskriptiven Statistik</b> . . . . .	230
17.1	Stichprobenfunktionen und ihre Realisierungen . . . . .	230
17.2	Aufbereitung von Datenmaterial (Urliste) in primären und sekundären Häufigkeitstabellen . . . . .	234
	Aufgabe 17.1 . . . . .	235
	Aufgabe 17.2 . . . . .	237
17.3	Graphische Darstellungen . . . . .	237
	Aufgaben 17.3 und 17.4 . . . . .	240
17.4	Skalierung der Achsen im Wahrscheinlichkeitspapier . . . . .	241
	Aufgabe 17.5 . . . . .	241
17.5	Weitere Aufgaben . . . . .	243
	Aufgaben 17.6 und 17.7 . . . . .	243
17.6	„Ausreißer“ im Datenmaterial . . . . .	244
<b>18</b>	<b>Erste Vertrauensintervalle für unbekannte Parameter einer normalver- teilten Grundgesamtheit</b> . . . . .	245
18.1	Vertrauensintervall für einen unbekanntem Mittelwert . . . . .	245
18.2	Vertrauensintervall für eine unbekanntem Streuung . . . . .	248
18.3	Weitere Aufgaben . . . . .	252
	Aufgaben 18.1 bis 18.6 . . . . .	252
<b>19</b>	<b>Einfache statistische Tests</b> . . . . .	254
19.1	Formaler Ablauf eines statistischen Tests . . . . .	254
19.2	Parametertests bei normalverteilter Grundgesamtheit . . . . .	256
19.2.1	Mittelwerttest (einfacher $t$ -Test) . . . . .	256
19.2.2	$\chi^2$ -Streuungstest . . . . .	256
19.2.3	Gemischte Aufgaben bei normalverteilter Grundgesamtheit . . . . .	258
	Aufgaben 19.1 bis 19.5 . . . . .	258
19.3	Parametertests in dichotomen Grundgesamtheiten . . . . .	259
19.3.1	Test auf Prüfung der Wahrscheinlichkeit $p$ der Grundgesamtheit . . . . .	259
	Aufgaben 19.6 bis 19.8 . . . . .	261
19.3.2	Test zum Vergleich der Parameter $p_1$ und $p_2$ . . . . .	261
19.4	$\chi^2$ -Anpassungstest . . . . .	263
19.5	Kolmogorow-Test . . . . .	265

19.6	Weitere Aufgaben . . . . .	267
	Aufgaben 19.9 bis 19.14 . . . . .	267
<b>20</b>	<b>Fehler 1. und 2. Art – Gütefunktion bei einem statistischen Test . . . . .</b>	<b>269</b>
	Aufgabe 20.1 . . . . .	271
<b>21</b>	<b>Schätzen und Testen als eine der Grundaufgaben in der Statistik . . . . .</b>	<b>272</b>
21.1	Parameterschätzung (Maximum-Likelihood-Methode) . . . . .	272
	Aufgaben 21.1 bis 21.8 . . . . .	274
21.2	Konfidenzschätzung für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit $p$ einer dichotomen Grundgesamtheit und notwendiger Stichprobenumfang . . . . .	275
	Aufgaben 21.9 und 21.10 . . . . .	277
21.3	Prüfverteilungen und ihre Quantile . . . . .	278
21.3.1	Quantile der $N(0; 1)$ -, $t$ - und $\chi^2$ -Verteilung . . . . .	278
21.3.2	Quantile der $F$ -Verteilung (Interpolation) . . . . .	279
	Aufgabe 21.11 . . . . .	284
21.4	Weiterer Anwendungsfall für die $t$ -Verteilung (doppelter $t$ -Test) . . . . .	284
	Aufgabe 21.12 . . . . .	285
21.5	Weitere Anwendungsfälle für die $\chi^2$ -Verteilung . . . . .	285
21.5.1	$\chi^2$ -Homogenitätstest . . . . .	285
21.5.2	$\chi^2$ -Unabhängigkeitstest . . . . .	287
	Aufgabe 21.13 . . . . .	288
21.6	Weitere Anwendungsfälle für die $F$ -Verteilung . . . . .	289
21.6.1	Konfidenzintervall für das Streuungsverhältnis $\sigma_1^2/\sigma_2^2$ . . . . .	289
21.6.2	$F$ -Test auf Übereinstimmung zweier Streuungen . . . . .	289
21.6.3	$F$ -Test auf Unkorreliertheit im multiplen Regressionsmodell . . . . .	290
21.6.4	$F$ -Test auf Vorliegen eines linearen Regressionsmodells (Fisherscher Linearitätstest) . . . . .	294
	Aufgaben 21.14 bis 21.16 . . . . .	295
21.6.5	Statistische Tests innerhalb der Varianzanalyse (Streuungszerlegung) . . . . .	296
<b>22</b>	<b>Nichtlineare Regression – ein Beispiel . . . . .</b>	<b>298</b>
	Aufgaben 22.1 und 22.2 . . . . .	299
<b>23</b>	<b>Simulation von Zufallszahlen und Anwendung von PC-Software . . . . .</b>	<b>300</b>
	Aufgaben 23.1 bis 23.3 . . . . .	301
	<b>Lösungen . . . . .</b>	<b>303</b>
	<b>Literaturhinweise . . . . .</b>	<b>348</b>
	<b>Sachwortverzeichnis . . . . .</b>	<b>349</b>