

**CARL HANSER VERLAG**

Wolfgang Preuß, Günter Wenisch

**Lehr- und Übungsbuch Mathematik**  
Band 2: Analysis

3-446-22290-1

[www.hanser.de](http://www.hanser.de)

**3.21** Man berechne, falls existent, die folgenden uneigentlichen Integrale.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_{-\infty}^2 e^{2x} dx & \text{b) } \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax} dx \text{ wobei } a > 0 \\ \text{c) } \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx & \text{d) } \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx \\ \text{e) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} & \text{f) } \int_0^{\infty} (1 - \tanh x) dx \end{array}$$

**3.22** Für welche Werte  $\lambda \in \mathbf{R}$  existiert das uneigentliche Integral  $\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt$ ?

**3.23** Man zeige durch eine grobe Abschätzung die Existenz des uneigentlichen Integrals  $\int_0^{\infty} \frac{8 dx}{x^4 + 4}$  und berechne seinen Wert.

*Hinweis:* Die Berechnung erfordert eine Partialbruchzerlegung und ist mit etwas Aufwand verbunden.

## 3.5 Anwendungen der Integralrechnung

Die große Bedeutung der Integralrechnung resultiert aus dem engen Bezug zu Begriffen aus den Naturwissenschaften und der Technik. Hier soll eine Auswahl von konkreten und verschiedenartigen Anwendungen vorgestellt werden, aus denen die Breite der Anwendbarkeit der Integralrechnung in der Praxis deutlich wird. Die Übertragung auf technische Problemstellungen fördert die Anschaulichkeit und das Verständnis des wesentlichen Kerns des Integralbegriffs.

Die ursprüngliche Aufgabe der Bestimmung des Flächeninhalts eines ebenen Bereichs war schon eine Anwendung der Integralrechnung. Eine Erweiterung dieser Aufgabe soll im folgenden behandelt werden.

### 3.5.1 Flächeninhalt eines Bereichs zwischen zwei Kurven

Sei  $B$  ein ebener Bereich, welcher im Streifen  $a \leq x \leq b$  der  $(x, y)$ -Ebene nach unten durch  $y = f_u(x)$  und nach oben durch  $y = f_o(x)$  berandet wird (Bild 3.11). Der Flächeninhalt von  $B$  kann als Differenz der Flächeninhalte derjenigen beiden Bereiche aufgefaßt werden, die von der  $x$ -Achse und  $f_o(x)$  bzw.  $f_u(x)$  eingeschlossen werden, also

$$\int_a^b f_o(x) dx - \int_a^b f_u(x) dx.$$

Wegen der allgemeinen Eigenschaften des bestimmten Integrals kann diese Differenz auch als Integral über die Differenz der Integranden formuliert werden:

$$|B| = \int_a^b \{f_o(x) - f_u(x)\} dx. \quad (3.41)$$

Dieses Ergebnis ist auch dann richtig, wenn die untere Berandung oder beide Berandungen ganz oder teilweise in der Halbebene  $y < 0$ , d. h. unterhalb der  $x$ -Achse verlaufen. Es ist jedoch sicherzustellen, daß im gesamten Intervall  $[a, b]$  die Berandungsfunktionen die Beziehung  $f_u(x) \leq f_o(x)$  erfüllen. Andernfalls muß das Integrationsintervall in Teilintervalle zerlegt werden, die durch die Schnittpunkte von  $f_u$  und  $f_o$  bestimmt werden. Anschließend bildet man die Summe der Beträge der Integrale über diese Teilintervalle und erhält den gesuchten Flächeninhalt zwischen  $f_u$  und  $f_o$  über  $[a, b]$ .

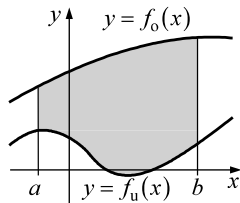


Bild 3.11 Bereich zwischen zwei Kurven

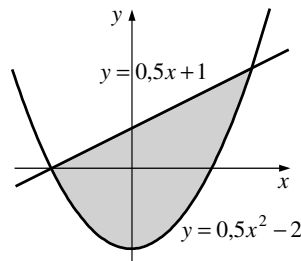


Bild 3.12 Von zwei Kurven eingeschlossener Bereich

### BEISPIELE

**3.28** Es wird der Flächeninhalt des von den Funktionen  $y = 0,5x + 1$  und  $y = 0,5x^2 - 2$  eingeschlossenen Bereichs berechnet. Zunächst interessieren die Schnittpunkte der beiden Funktionskurven. Die Gleichsetzung

$$0,5x + 1 = 0,5x^2 - 2$$

ergibt eine quadratische Gleichung mit den Lösungen  $x_1 = -2$  und  $x_2 = 3$ . Eine Skizze zeigt, daß die Gerade  $y = 0,5x + 1$  die obere Berandung und die Parabel  $y = 0,5x^2 - 2$  die untere Berandung des eingeschlossenen Bereichs darstellen (Bild 3.12).

Der gesuchte Flächeninhalt kann daher mit

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 \{(0,5x + 1) - (0,5x^2 - 2)\} dx &= \int_{-2}^3 (-0,5x^2 + 0,5x + 3) dx \\ &= \left[ -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 3x \right]_{-2}^3 \\ &= -\frac{27}{6} + \frac{9}{4} + 9 - \frac{8}{6} - 1 + 6 \\ &= \frac{125}{12} \approx 10,416667 \end{aligned}$$

berechnet werden. ■

**3.29** Es soll die von der Kurve  $y^2 = x^2 - x^4$  eingeschlossene Fläche berechnet werden. Zunächst sollte man eine grobe Vorstellung des eingeschlossenen Bereichs entwickeln. Aus  $y^2 = x^2 - x^4 = x^2(1 - x^2)$  kann durch Wurzelziehen auf

$$y = \pm x\sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1$$

geschlossen werden. Eine Skizze hilft, die Symmetrie des eingeschlossenen Bereichs zu erkennen (Bild 3.13). Es genügt, den Flächeninhalt des im ersten Quadranten gelegenen Teilbereichs zu berechnen und zu vervierfachen.

$$4 \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2} dx = 4 \left[ -\frac{1}{3} (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

Dieses Resultat erhält man auch mit (3.41), wobei man  $f_o(x) = x\sqrt{1 - x^2}$  und  $f_u(x) = -x\sqrt{1 - x^2}$  nur für  $0 \leq x \leq 1$  setzen darf, für  $-1 \leq x \leq 0$  muß umgekehrt zugeordnet werden.

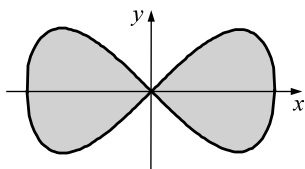


Bild 3.13 Von  $y^2 = x^2 - x^4$  eingeschlossener Bereich ■

### 3.5.2 Die Bogenlänge einer Funktionskurve

Eine weitere Anwendung der Integralrechnung in der Geometrie ist die Ermittlung der Länge  $s$  einer Funktionskurve  $y = f(x)$  über einem Intervall  $[a, b]$  (Bild 3.14). Dabei wird die Funktion  $f(x)$  als stetig differenzierbar vorausgesetzt. Man kann die Kurve in Stücke zerlegen und die Länge jedes Teils  $\overline{PQ}$  abschätzen durch die Länge  $ds = \overline{PQ'}$  des zugehörigen Stücks der Tangente an die Funktionskurve im Punkt  $P$  (Bild 3.14).

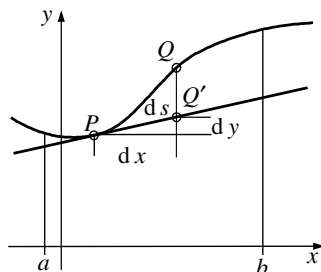


Bild 3.14 Zur Bogenlänge einer Funktionskurve

Nach Pythagoras gilt

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \\ &= dx \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} \end{aligned}$$

für die Länge eines Tangentenstücks. Die Gesamtlänge  $s$  der Funktionskurve ist die Summe der Längen der Kurvenstücke und damit näherungsweise die Summe der Längen  $ds$  der einzelnen Tangentenstücke. Diese Näherung wird offensichtlich verbessert, wenn die Zerlegung der Kurve verfeinert wird, d. h. wenn eine größere Anzahl  $n$  von kleineren Kurventeilen genommen wird. Der Grenzprozeß  $n \rightarrow \infty$  führt auf das bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe.

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n ds = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx. \quad (3.42)$$

### BEISPIEL

**3.30** Es soll die Länge der Funktionskurve  $y = \cosh x$  über dem Intervall  $[-1, 1]$  berechnet werden. Es gilt

$$s = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \{(\cosh x)'\}^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (\sinh x)^2} dx$$

und wegen  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$  kann die Bogenlänge zu

$$s = \int_{-1}^1 \cosh x dx = [\sinh x]_{-1}^1 = 2 \sinh(1) \approx 2,3504$$

ermittelt werden. ■

### 3.5.3 Volumen und Mantelfläche von Rotationskörpern

Gegeben sei im Intervall  $[a, b]$  eine positive Funktion  $y = f(x)$ . Bei einer Rotation dieser Funktionskurve um die  $x$ -Achse entsteht eine Fläche, die man als Mantel eines Rotationskörpers auffassen kann. Die Ebenen  $x = a$  und  $x = b$  bilden die Berandung in der  $x$ -Richtung. Schneidet man diesen Rotationskörper in Scheiben der Dicke  $dx$ , so stellt jede Scheibe näherungsweise einen Kreiszyylinder mit Radius  $y$  und Höhe  $dx$  dar. Das Volumen einer Scheibe ist dann

$$dV = \pi y^2 dx$$

und das Volumen des Rotationskörpers ist näherungsweise die Summe dieser Zylindervolumina. Ein Grenzprozeß, bei dem die Anzahl der Scheiben gegen  $\infty$  strebt und die Scheibendicken gegen 0 gehen, führt auf das bestimmte Integral

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \quad (3.43)$$

als Volumen des Rotationskörpers.

Zur Berechnung der Mantelfläche wird dieselbe Zerlegung in Scheiben der Dicke  $dx$  betrachtet. Die Mantelfläche einer Scheibe ist

$$dM = 2\pi y \cdot ds$$

wobei  $ds = dx\sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$  näherungsweise die Bogenlänge des Scheibenrands in der  $(x, y)$ -Ebene bedeutet (siehe (3.42)). Der gleiche Grenzprozeß liefert dann

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \quad (3.44)$$

als Mantelfläche des Rotationskörpers.

### BEISPIEL

**3.31** Durch Rotation der Funktion  $y = x^2 + 1$  über dem Intervall  $[-1, 1]$  entsteht ein Körper, dessen Volumen und Mantelfläche berechnet werden soll. Bei Beachtung der Symmetrie zu  $x = 0$  erhält man

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 (x^2 + 1)^2 dx = 2\pi \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1) dx = 2\pi \left[ \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x \right]_0^1 \\ &= 2\pi \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) = \pi \frac{56}{15} \approx 11,729 \end{aligned}$$

und

$$M = 4\pi \int_0^1 (x^2 + 1) \sqrt{1 + 4x^2} dx = 8\pi \int_0^1 (x^2 + 1) \sqrt{\frac{1}{4} + x^2} dx.$$

Die Standardsubstitution

$$u = \operatorname{arsinh} 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2} \sinh u, \quad dx = \frac{1}{2} \cosh u du$$

ergibt

$$\begin{aligned} M &= 8\pi \int_0^{\operatorname{arsinh} 2} \left( \frac{1}{4} \sinh^2 u + 1 \right) \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sinh^2 u} \frac{1}{2} \cosh u du \\ &= 2\pi \int_0^{\operatorname{arsinh} 2} \left( \frac{1}{4} \sinh^2 u + 1 \right) \cosh^2 u du \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\operatorname{arsinh} 2} (\sinh^2 u + 4) \cosh^2 u du. \end{aligned}$$

Partielle Integration mit Rückwurf führt analog Beispiel 3.9 auf die Zwischenergebnisse

$$\int \cosh^2 u du = \frac{1}{2}(u + \sinh u \cosh u)$$

und

$$\begin{aligned}\int \sinh^2 u \cosh^2 u \, du &= \frac{1}{4} \sinh u \cosh^3 u - \frac{1}{4} \int \cosh^2 u \, du \\ &= \frac{1}{4} \sinh u \cosh^3 u - \frac{1}{8} (u + \sinh u \cosh u).\end{aligned}$$

Durch die Rücksubstitution

$$\sinh u = 2x, \quad \cosh u = \sqrt{1 + \sinh^2 u} = \sqrt{1 + 4x^2}$$

gelangt man schließlich zum Ergebnis

$$\begin{aligned}M &= \frac{\pi}{2} \left[ \frac{1}{4} \sinh u \cosh^3 u - \frac{1}{8} (u + \sinh u \cosh u) + 2(u + \sinh u \cosh u) \right]_0^{\operatorname{arsinh} 2} \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ \frac{1}{4} \sinh u \cosh^3 u + \frac{15}{8} u + \frac{15}{8} \sinh u \cosh u \right]_0^{\operatorname{arsinh} 2} \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ \frac{1}{2} x (\sqrt{1 + 4x^2})^3 + \frac{15}{8} \operatorname{arsinh} 2x + \frac{15}{4} x \sqrt{1 + 4x^2} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{5}{2} \sqrt{5} + \frac{15}{8} \operatorname{arsinh} 2 + \frac{15}{4} \sqrt{5} \right) \\ &= \pi \left( \frac{25}{8} \sqrt{5} + \frac{15}{16} \operatorname{arsinh} 2 \right) \approx 26,204.\end{aligned}$$

Wie man an diesem Beispiel sieht, kann die Auswertung des Mantelflächenintegrals einen größeren Aufwand mit sich bringen, auch wenn die rotierte Funktion recht elementar aussieht. ■

### 3.5.4 Integration der Bewegungsgleichung

Die Beschreibung der Bewegung eines Massenpunktes oder eines Körpers, dessen Masse  $m$  man im Schwerpunkt vereinigt denkt, bedeutet die Angabe seines Ortes  $s$  als Funktion der Zeit  $t$ . Die erste Ableitung dieser Funktion ist seine Geschwindigkeit  $v$ , die zweite Ableitung seine Beschleunigung  $a$ .

$$\begin{aligned}s(t) & \quad \text{Ort (Bahn) des Massenpunkts} \\ v(t) = \dot{s}(t) & \quad \text{Geschwindigkeit des Massenpunkts} \\ a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t) & \quad \text{Beschleunigung des Massenpunkts}\end{aligned}$$

Wirkt auf den Körper mit Masse  $m$  die Kraft  $F(t)$ , so unterliegt er gemäß der Newtonschen Bewegungsgleichung  $F = ma$  der Beschleunigung

$$a(t) = \frac{F(t)}{m}.$$

Seine Geschwindigkeit  $v(t)$  ist dann eine Stammfunktion dieser Beschleunigung und sein Ort  $s(t)$  ist eine Stammfunktion der Geschwindigkeit. Bei bekannter Kraft auf den Körper kann also mit Hilfe zweier unbestimmter Integrationen auf seine Bahn geschlossen werden.

$$v(t) = \int a(t) \, dt, \quad s(t) = \int v(t) \, dt \quad (3.45)$$

Da bei jeder unbestimmten Integration eine freie Konstante entsteht, ist dieses Ergebnis noch nicht eindeutig. Die anschauliche Bedeutung der Integrationskonstanten wird aber deutlich, wenn die untere Integrationsgrenze konkretisiert wird. Es ist üblich und keine Einschränkung, die untere Integrationsgrenze zu 0 zu wählen.

Aus

$$v(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau + C_1$$

erkennt man durch Einsetzen von  $t = 0$ , daß  $C_1 = v(0)$  gelten muß. Analog folgt aus

$$s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau + C_2$$

die Bedeutung  $C_2 = s(0)$ . Wenn man davon ausgeht, daß die Bewegung des Körpers im Zeitpunkt  $t = 0$  beginnt, bedeuten die Integrationskonstanten also die Startgeschwindigkeit und den Startort. Diese beiden Daten sind zur eindeutigen Bestimmung der Bahn des Körpers offensichtlich erforderlich.

$$v(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau + v(0), \quad s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau + s(0) \quad (3.46)$$

*Bemerkung:* Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Kraft sind eigentlich vektorielle Größen. Die hier verwendeten Operationen wie Ableitung und Integration bezüglich der Zeit wirken jeweils auf alle Komponenten. Wegen der übersichtlicheren Darstellung wird hier und in den Beispielen nur eine Komponente betrachtet. Dies entspricht einer eindimensionalen Bewegung.

### BEISPIELE

**3.32 Freier Fall.** Auf den Körper mit der Masse  $m$  wirke eine konstante Kraft  $F$ . Am Anfang  $t = 0$  des betrachteten Bewegungsvorgangs soll sich der Körper am Ort  $s_0$  befinden und die Geschwindigkeit  $v_0$  besitzen. Dann ist

$$v(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau + v(0) = \int_0^t \frac{F}{m} d\tau + v_0 = \frac{F}{m}t + v_0$$

$$s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau + s(0) = \int_0^t \left( \frac{F}{m}\tau + v_0 \right) d\tau + s_0 = \frac{F}{2m}t^2 + v_0t + s_0$$

Wenn die konstante Kraft  $F$  speziell die Gewichtskraft  $G$  ist, bedeutet die beschriebene Bewegung den sogenannten freien Fall. Wegen  $G = mg$ , worin  $g$  die Erdbeschleunigung bedeutet, lautet die Bahn des freien Falls  $s(t) = \frac{g}{2}t^2 + v_0t + s_0$ . ■

**3.33 Anfahrvorgang eines Fahrzeugs.** Die Kraft sei  $F(t) = \widehat{F} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$ ,  $\widehat{F} = \text{const}$ , die Startgeschwindigkeit des Fahrzeugs sei 0, der zurückgelegte Weg wird gegen den Startort gemessen, d. h.  $v_0 = 0$  und  $s_0 = 0$ . Offenbar ist  $F(0) = 0$  und der zeitliche Verlauf der Kraft entspricht einer allmählich



wachsenden Beschleunigung des Fahrzeugs. Die Konstante  $\widehat{F}$  bedeutet den Grenzwert der Kraft für große Zeiten. Die Tangente an den Kraftverlauf in  $t = 0$  schneidet die Asymptote  $\widehat{F}$  in  $t = T$ , zum Zeitpunkt  $t = 3T$  hat die Kraft 95 % ihres asymptotischen Endwerts  $\widehat{F}$  erreicht. Ein großer Wert der Konstanten  $T$  bedeutet demnach, daß die Kraft nur langsam gesteigert wird, beim Kraftfahrzeug würde man von einem sanften Einkuppeln sprechen. Die Geschwindigkeit des Fahrzeugs ist wegen  $v_0 = 0$

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t a(\tau) \, d\tau = \int_0^t \frac{\widehat{F}}{m} (1 - e^{-\frac{\tau}{T}}) \, d\tau \\ &= \frac{\widehat{F}}{m} [\tau + T e^{-\frac{\tau}{T}}]_0^t = \frac{\widehat{F}}{m} (t + T e^{-\frac{t}{T}} - T) \end{aligned}$$

und der zurückgelegte Weg beträgt mit  $s_0 = 0$

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t v(\tau) \, d\tau = \int_0^t \frac{\widehat{F}}{m} (\tau + T e^{-\frac{\tau}{T}} - T) \, d\tau \\ &= \frac{\widehat{F}}{m} \left[ \frac{1}{2} \tau^2 - T^2 e^{-\frac{\tau}{T}} - T\tau \right]_0^t = \frac{\widehat{F}}{m} \left( \frac{1}{2} t^2 - T^2 e^{-\frac{t}{T}} - Tt + T^2 \right) \\ &= \frac{\widehat{F}}{2m} t^2 - \frac{\widehat{F}T}{m} t + \frac{\widehat{F}T^2}{m} (1 - e^{-\frac{t}{T}}). \end{aligned}$$

Der erste Term dieses Resultats erinnert an das Beispiel der konstanten Kraft (freier Fall). ■

- 3.34** *Eine Fahrt mit dem Zug.* Durch eine konstante Kraft über einen Zeitraum von 12 Minuten wird ein Zug aus dem Stand auf eine Geschwindigkeit von 100 Kilometern pro Stunde beschleunigt. Diese Geschwindigkeit behält er eine Stunde lang bei und bremst dann innerhalb von 6 Minuten mit konstanter Kraft zum Stillstand. Es soll die Anzeige eines Kilometerzählers im zeitlichen Verlauf bestimmt werden, wenn bei Fahrtbeginn 0 Kilometer angezeigt werden.

Eine konstante Beschleunigung bedeutet einen linearen Anstieg der Geschwindigkeit wie der freie Fall zeigt. Ein Sprung in der Geschwindigkeit ist nicht möglich, er würde eine unendliche Beschleunigung bedeuten. Wegen der Stetigkeit der Geschwindigkeit muß ihr zeitlicher Verlauf wie folgt aussehen.

$$v(t) = \begin{cases} 500 \frac{\text{km}}{\text{h}^2} \cdot t, & 0 \text{ h} \leq t \leq 0,2 \text{ h} \\ 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}, & 0,2 \text{ h} \leq t \leq 1,2 \text{ h} \\ -1000 \frac{\text{km}}{\text{h}^2} \cdot t + 1300 \frac{\text{km}}{\text{h}}, & 1,2 \text{ h} \leq t \leq 1,3 \text{ h} \\ 0 \frac{\text{km}}{\text{h}}, & 1,3 \text{ h} \leq t \end{cases}$$

Die Konstanten ergeben sich aus der erwähnten Bedingung der Stetigkeit, d. h., die einzelnen Abschnitte müssen stetig aneinander anschließen. Die Anzeige des Kilometerzählers lautet dann

$$s(t) = \begin{cases} 250 \frac{\text{km}}{\text{h}^2} \cdot t^2, & 0 \text{ h} \leq t \leq 0,2 \text{ h} \\ 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t - 10 \text{ km}, & 0,2 \text{ h} \leq t \leq 1,2 \text{ h} \\ -500 \frac{\text{km}}{\text{h}^2} \cdot t^2 + 1300 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t - 730 \text{ km}, & 1,2 \text{ h} \leq t \leq 1,3 \text{ h} \\ 115 \text{ km}, & 1,3 \text{ h} \leq t \end{cases}$$

Auch hier wurden die Konstanten so bestimmt, daß die Stetigkeit gesichert wird. Als Stammfunktion einer stetigen Funktion ist  $s(t)$  sogar stetig differenzierbar. Dies ist in Bild 3.15 gut zu erkennen. Während  $v(t)$  Knickstellen aufweist zeigt die Stammfunktion  $s(t)$  einen glatten Verlauf, so daß überall eine eindeutige Tangente existiert.

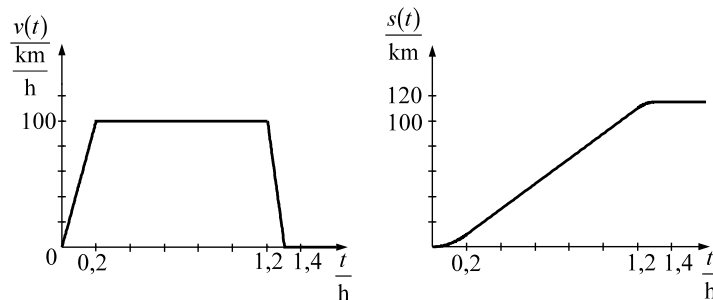


Bild 3.15 Geschwindigkeit und zurückgelegter Weg des Zuges

Dieses Beispiel zeigt, daß auch unbestimmte Integrale einen direkten Praxisbezug haben können. Ein Kilometerzähler kann als Integrator eines Tachometers angesehen werden, eine Wasseruhr kann als Integrator eines Durchflußmessers verstanden werden, etc. ■

### 3.5.5 Mittelwerte

Mit Hilfe von Integralen können Mittelwerte von Funktionen gebildet werden. Man unterscheidet dabei u. a. lineare und quadratische Mittelwerte.

Der lineare Mittelwert der Funktion  $y = f(x)$  auf dem Intervall  $[a, b]$  ist

$$\bar{y}_{\text{linear}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (3.47)$$

Man kann den linearen Mittelwert als diejenige konstante Funktion auffassen, die mit der  $x$ -Achse im Intervall  $[a, b]$  die gleiche Fläche einschließt wie die Funktion  $y = f(x)$ .