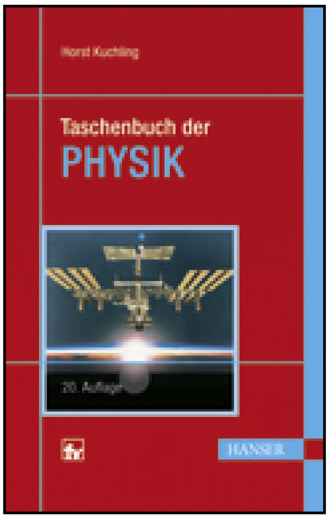


Leseprobe

Horst Kuchling

Taschenbuch der Physik

ISBN: 978-3-446-42457-9

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

http://www.hanser.de/978-3-446-42457-9

sowie im Buchhandel.

T Schwingungsdauer $= 1/f$, Dauer einer vollen Schwingung,
J Trägheitsmoment des die Drehschwingung ausführenden Körpers, bezogen auf seine Drehachse,

dann gelten analog zu (M 13.11)

(M 13.13) $$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{D}{J}}; \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{J}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}}$$

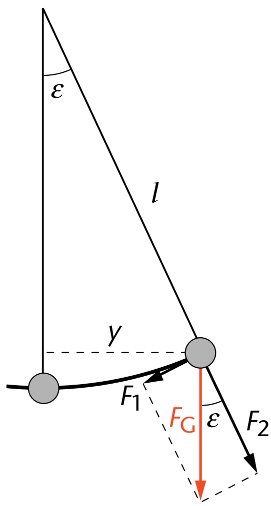
	D	M	ε	ω	f	T	J
SI	$\frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$	$\mathrm{N \cdot m}$	rad	$\frac{1}{\mathrm{s}}$	$\mathrm{Hz} = \frac{1}{\mathrm{s}}$	s	$\mathrm{kg \cdot m^2}$

13.2.4 Pendelschwingungen

Pendel führen Drehschwingungen aus. Das rückstellende Drehmoment wird von der Schwerkraft erzeugt.

Mathematisches Pendel

Dies ist ein idealisiertes Pendel mit *punktförmiger* Masse am *masselosen* Faden, dessen Bewegung bei kleinen Auslenkungen (ε bis ca. 8°) als lineare Schwingung angesehen werden kann.



Wenn
T Schwingungsdauer $= 1/f$, Dauer eines vollen Hin- und Herganges (Periode),
l Pendellänge, Abstand Drehpunkt–Schwerpunkt,
g Fallbeschleunigung $= 9{,}807\,\mathrm{m/s^2}$ (auf der Erde),

dann gilt $F_1/F_G = y/l$ und, da y bei kleinem Winkel ε dem Weg auf dem Bogen gleichgesetzt werden kann, entsprechend (M 13.8)

$$k = \frac{F_1}{y} = \frac{F_G}{l} = \frac{mg}{l}$$ und eingesetzt in (M 13.11)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}}$$ oder

(M 13.14) $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$

	T	l	g
SI	s	m	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

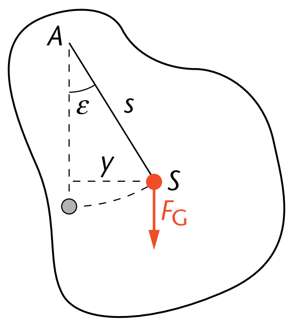
Beachte:

- Die Schwingungsdauer T hängt nicht von der Masse des Pendelkörpers ab.
- Die Schwingungsdauer hängt innerhalb der angegebenen Grenzen ($\varepsilon < 8°$) nicht von der Amplitude ab.

Formel (M 13.14) kann auch für reale (physische) Pendel angewendet werden, falls die Masse des Fadens vernachlässigbar klein gegenüber der Masse des Pendelkörpers und die Fadenlänge groß gegenüber den Abmessungen des Körpers ist.

Physisches Pendel

Pendel, bei denen die Bedingungen des mathematischen Pendels nicht erfüllt sind, heißen physische (d. h. körperliche) Pendel (leider manchmal physikalische Pendel genannt).



Wenn

T Schwingungsdauer $= 1/f$,
J_A Trägheitsmoment des pendelnden Körpers, bezogen auf die durch den Drehpunkt A gehende Achse,
m Masse des pendelnden Körpers,
s Abstand Drehpunkt A – Schwerpunkt S,

dann gilt

$D = \frac{M}{\varepsilon} = \frac{F_G y}{\varepsilon} = \frac{F_G s \sin\varepsilon}{\varepsilon}$ oder, weil bei kleinen Winkeln $\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} \approx 1$,

$D = F_G s = mgs$ und entsprechend (M 13.13)

(M 13.15) $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{mgs}}}$

	T	J	m	g	s
SI	s	$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$	kg	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	m

Beachte:

- (M 13.15) gilt nur für Amplituden kleiner als $\approx 8°$.
- J_A ist mit dem Satz von Steiner zu bestimmen.
- Mit $J_A = ms^2$ und $s = l$ ergibt sich die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels (M 13.14).

Reduzierte Pendellänge

Unter der *reduzierten Pendellänge* eines physischen Pendels versteht man die Länge eines mathematischen Pendels gleicher Schwingungsdauer.

Wenn
l' reduzierte Pendellänge,
J_A Trägheitsmoment, bezogen auf die durch den Drehpunkt A gehende Achse,
m Masse des physischen Pendels,
s Abstand Schwerpunkt S – Drehpunkt A,

dann gilt entsprechend (M 13.14) und (M 13.15)

$$2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{mgs}} \quad \text{oder}$$

(M 13.16) $$\boxed{l' = \frac{J_A}{ms}}$$

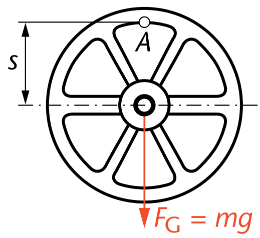
	l'	J_A	m	s
SI	m	$\mathrm{kg \cdot m^2}$	kg	m

Beachte:

- Im Abstand l' senkrecht unter dem Aufhängepunkt eines drehbar gelagerten Körpers befindet sich der **Schwingungs-** oder **Stoßmittelpunkt**. Stöße, die den Körper zum Pendeln bringen sollen, müssen gegen diesen Punkt gerichtet sein, wenn im Aufhängepunkt keine „Rückstöße“ auftreten sollen.
- Die Schwingungsdauer eines physischen Pendels ändert sich nicht, wenn Aufhängepunkt und Schwingungsmittelpunkt vertauscht werden. Anwendung beim **Reversionspendel** z. B. zur Bestimmung der Fallbeschleunigung.

Bestimmung des Trägheitsmoments

Durch Messung von s, m und T kann das Trägheitsmoment eines beliebigen Körpers experimentell bestimmt werden.



Aus (M 13.15) und (M 7.57) folgt

$$J_S = \frac{mgsT^2}{4\pi^2} - ms^2 \quad \text{oder}$$

(M 13.17) $$\boxed{J_S = ms\left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - s\right)}$$

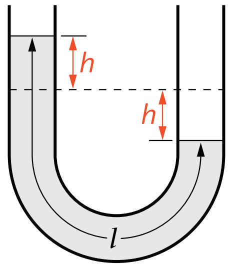
	J	m	g	s	T
SI	$\mathrm{kg \cdot m^2}$	kg	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$	m	s

Beachte:

- Zur Bestimmung von J_S ist der Körper an einem Punkt *außerhalb* S aufzuhängen und mit *kleiner* Amplitude anzustoßen.

13.2.5 Flüssigkeitsschwingungen

Wird die Flüssigkeit in den Schenkeln eines U-Rohres aus dem Gleichgewicht gebracht, so führt sie harmonische Schwingungen aus.



Wenn

T Schwingungsdauer $= 1/f$,

l Länge der Flüssigkeitssäule von Oberfläche bis Oberfläche,

g Fallbeschleunigung $= 9{,}807\ \mathrm{m/s^2}$ (auf der Erde),

dann gilt, wenn der Höhenunterschied zwischen beiden Oberflächen $2h$ beträgt, für die Rückstellkraft $F_R = F_G = -2hA\varrho g$. Die Richtgröße $k = -F_R/y = -F_R/h$ ergibt sich zu $k = 2A\varrho g$. Mit der Masse $m = lA\varrho$ folgt für die Schwingungsdauer entsprechend (M 13.11) $T = 2\pi\sqrt{m/k}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{lA\varrho}{2A\varrho g}}$$ und daraus

(M 13.18) $$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}}$$

	T	l	g
SI	s	m	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Beachte:

- Die Schwingungsdauer hängt nur von l, nicht aber von ϱ, A oder h ab.
- Die schwingende Flüssigkeitssäule besitzt die gleiche Schwingungsdauer wie ein mathematisches Pendel mit der halben Länge der Flüssigkeitssäule.

13.2.6 Schwingungsenergie

Die Energie eines ungedämpft schwingenden Systems ist konstant. Sie setzt sich aus potenzieller Energie E_p und kinetischer Energie E_k zusammen. Beide Energiearten ändern ihre Größe periodisch. Zu jedem

Zeitpunkt gilt $E = E_p + E_k$. Mit (M 7.21) und (M 7.19) ergibt sich

$$E = \frac{ky^2}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

Wenn
E Energie des Schwingers,
k Richtgröße,
y Amplitude, Auslenkungsmaximum,
φ Phasenwinkel $= \omega t + \varphi_0$,

dann gilt mit (M 13.2) und (M 13.3)

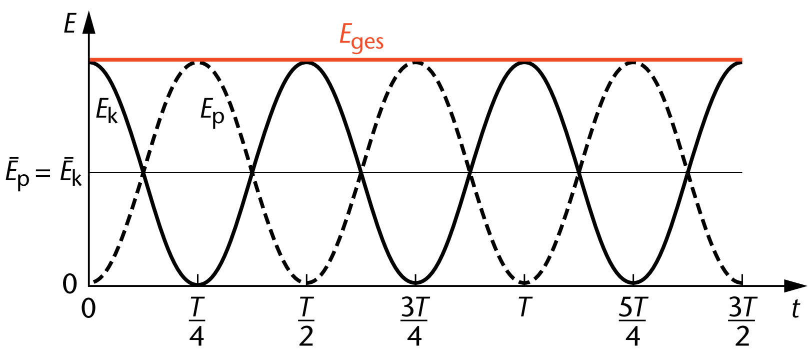
$$E = \frac{k}{2}\hat{y}^2 \sin^2 \varphi + \frac{m}{2}\hat{y}^2 \omega^2 \cos^2 \varphi. \quad \text{Mit (M 13.8)} \quad m\omega^2 = k \quad \text{folgt}$$

$$E = \frac{k}{2}\hat{y}^2 \sin^2 \varphi + \frac{k}{2}\hat{y}^2 \cos^2 \varphi, \quad \text{daraus}$$

$$E = \frac{k}{2}\hat{y}^2(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \quad \text{und schließlich}$$

(M 13.19) $\boxed{E = \dfrac{k\hat{y}^2}{2} = \dfrac{m\hat{v}^2}{2}}$

	E	k	y	v	m	φ
SI	J = N·m	$\frac{\text{N}}{\text{m}}$	m	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$	kg	rad = 1



Beachte:

- Die Gesamtenergie ist konstant. Die *periodische* Umwandlung von kinetischer in potenzielle Energie (und umgekehrt) erfolgt mit der doppelten Frequenz des Schwingers.
- Beim Nulldurchgang besitzt der Schwinger nur kinetische Energie, die potenzielle Energie ist null. In den Umkehrpunkten ist es umgekehrt.

Übersicht:

	allgemein	**Umkehrpunkt**	**Nulldurchgang**
$E_p =$	$\frac{ky^2}{2} = \frac{k\hat{y}^2}{2}\sin^2\varphi$	$\hat{E}_p = \frac{k\hat{y}^2}{2}$	0
$E_k =$	$\frac{mv^2}{2} = \frac{m\hat{v}^2}{2}\cos^2\varphi$	0	$\hat{E}_k = \frac{m\hat{v}^2}{2}$

M

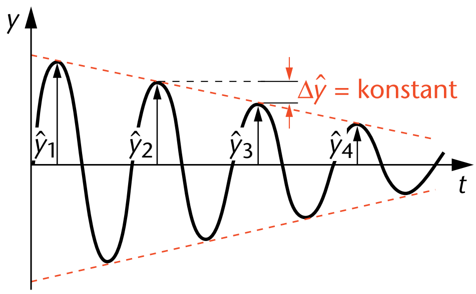
13.3 Freie gedämpfte Schwingung

Die Energie eines schwingenden Systems wird durch bremsende Kräfte wie innere und äußere Reibung, Luftwiderstand u. Ä. allmählich aufgezehrt. Da $E \sim \hat{y}^2$ (M 13.19), nimmt auch die Amplitude $\hat{y}$ bis zu null ab.

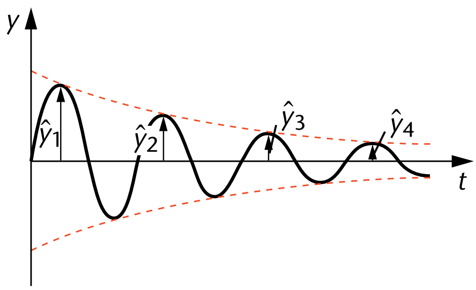
Als *Dämpfung* bezeichnet man das gesetzmäßige Abnehmen der Amplitude im Verlaufe einer Schwingung.

Dabei sind – unabhängig von der Art der dämpfenden Kraft – zwei Möglichkeiten zu unterscheiden:

- Die Kraft ist konstant, z. B. Reibung in der Lagerung des Schwingers. Dann sind die Amplituden Glieder einer fallenden *arithmetischen* Reihe, sie nehmen *linear* ab. Die *Differenz* zweier benachbarter Amplituden gleichen Vorzeichens $(\hat{y}_i - \hat{y}_{i+1})$ ist konstant.



- Die Kraft ist der Geschwindigkeit proportional, z. B. innere Reibung bei elastischer Verformung. Dann sind die Amplituden Glieder einer fallenden *geometrischen* Reihe, sie nehmen *exponentiell* ab. Der *Quotient* zweier benachbarter Amplituden gleichen Vorzeichens $(\hat{y}_i/\hat{y}_{i+1})$ ist konstant.



■ Bei gedämpften Schwingungsvorgängen wird in der Technik die geschwindigkeitsabhängige Dämpfung angestrebt. Da sich aber auch bei guter Lagerung des Schwingers Reibung nie ganz vermeiden lässt, treten beide Dämpfungsarten meist gleichzeitig auf. Die resultierende Hüllkurve der Amplituden ergibt sich dann aus einer Überlagerung beider Hüllkurven (algebraische Addition der momentanen Elongationen).

13.3.1 Schwingungsgleichung

Die geschwindigkeitsabhängige Dämpfung wird durch eine Kraft (meist innere Reibung) verursacht, die der Geschwindigkeit proportional und ihr entgegengerichtet ist: $F_\mathrm{d} \sim -v$. Der Proportionalitätsfaktor wird als **Dämpfungskonstante** β bezeichnet, also $F_\mathrm{d} = -\beta v = \beta \dot{y}$.

SI-Einheit der Dämpfungskonstanten: $[\beta] = \dfrac{\mathrm{N \cdot s}}{\mathrm{m}} = \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$.

Aus Zweckmäßigkeitsgründen führt man den **Abklingkoeffizienten** $\delta = \beta/(2m)$ ein.

SI-Einheit des Abklingkoeffizienten: $[\delta] = \dfrac{1}{\mathrm{s}}$.

Wenn

y Elongation, Auslenkung,
$\dot{y}$ Momentangeschwindigkeit,
$\ddot{y}$ Momentanbeschleunigung,
β Dämpfungskonstante $= 2m\delta$,
δ Abklingkoeffizient $= \beta/(2m)$,
ω_0 Eigenkreisfrequenz (Kennkreisfrequenz) der gleichen Schwingung *ohne* Dämpfung $= 2\pi f_0$,

dann lautet die Grundgleichung der Dynamik (M 7.1) für diesen Fall:
Rückstellkraft + Dämpfungskraft = Masse × Beschleunigung, also

$-ky - \beta\dot{y} = m\ddot{y}$. Daraus folgt

$\ddot{y} + \dfrac{\beta}{m}\dot{y} + \dfrac{k}{m}y = 0$. Mit $\dfrac{\beta}{m} = 2\delta$ und $\dfrac{k}{m} = \omega_0^2$ ergibt sich die

Gleichung der gedämpften Schwingung

(M 13.20) $$\boxed{\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0}$$

Beachte:

- Die Begriffe *Dämpfungskonstante, Abklingkoeffizient, Dämpfungskoeffizient* u. a. sowie ihre Formelzeichen werden in der Literatur nicht einheitlich verwendet.

13.3.2 Elongation

Wenn

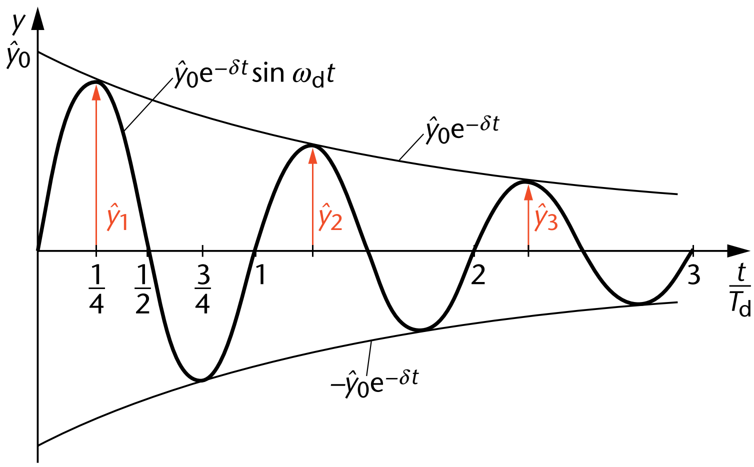
y	Elongation (Auslenkung) zur Zeit t,
$\hat{y}_0$	Anfangswert der Amplitudenhüllkurve (zur Zeit $t = 0$),
$\hat{y}$	Amplitude,
e	Basis des natürlichen Logarithmus $= 2{,}718\,28\ldots$,
φ	Phasenwinkel $= \omega_\mathrm{d} t + \varphi_0$,
ω_d	Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung → (M 13.29),
φ_0	Nullphasenwinkel,
δ	Abklingkoeffizient $= \beta/(2m)$,

dann gilt als eine Lösung der Differenzialgleichung (M 13.20)

(M 13.21) $$\boxed{y = \hat{y}_0\, \mathrm{e}^{-\delta t} \sin\varphi}$$

	$y, \hat{y}_0$	t	δ	φ
SI	m	s	$\frac{1}{\mathrm{s}}$	rad = 1

■ Es ist günstig, die Zeitmessung ($t = 0$) an Stellen zu beginnen, die eine einfache mathematische Lösung ermöglichen. Es sind dies der Schwingungsmittelpunkt ($y = 0$) und der Umkehrpunkt ($v = 0$).

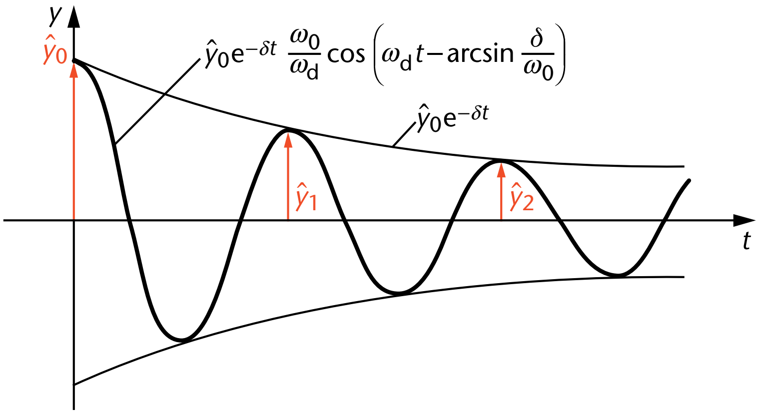


► Bei Beginn der Schwingung im *nicht ausgelenkten* Zustand (z. B. durch Anstoß) gelten die Anfangsbedingungen: $t = 0$, $y_0 = 0$, $v_0 = \hat{v}$, $\varphi_0 = 0$. An Stelle des (nicht messbaren) Anfangswertes der Amplitudenhüllkurve $\hat{y}_0$ wird wegen (M 13.4) $\hat{v} = \hat{y}\omega$ in (M 13.21) $\hat{y}_0$ durch $\hat{v}/\omega_\mathrm{d}$ ersetzt.

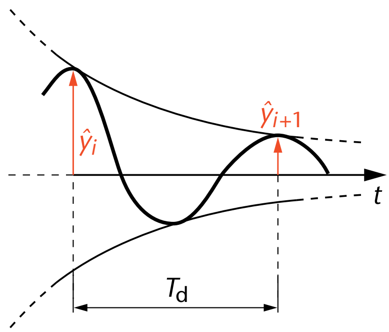
(M 13.22) $$\boxed{y = \frac{\hat{v}}{\omega_\mathrm{d}} \mathrm{e}^{-\delta t} \sin \omega_\mathrm{d} t}$$

▶ Bei Beginn der Schwingung im *ausgelenkten* Zustand gelten die Anfangsbedingungen: $t = 0, v_0 = 0, y_0 = \hat{y}_0$. Sie werden erfüllt von

(M 13.23) $$\boxed{y = \hat{y}_0 \, \mathrm{e}^{-\delta t} \frac{\omega_0}{\omega_\mathrm{d}} \cos\left(\omega_\mathrm{d} t - \arcsin \frac{\delta}{\omega_0}\right)}$$



■ Der Quotient zweier aufeinander folgender Amplituden gleichen Vorzeichens ist konstant und wird als Amplitudenverhältnis q (manchmal Dämpfungsverhältnis $\varkappa$) bezeichnet.



Wenn
- q Amplitudenverhältnis,
- δ Abklingkoeffizient $= \beta/(2m)$,
- T_d Schwingungsdauer der gedämpften Schwingung,
- Λ logarithmisches Dekrement,
- n beliebige ganze Zahl,

dann gilt $\hat{y}_i/\hat{y}_{i+1} = q$. Daraus folgt für die n-te Amplitude

(M 13.24) $$\boxed{\hat{y}_{i+n} = \frac{\hat{y}_i}{q^n}}$$

Da der zeitliche Abstand zweier benachbarter Amplituden eine Schwingungsdauer T_d beträgt, folgt aus (M 13.21)

(M 13.25) $$\boxed{\mathrm{e}^{\delta T_\mathrm{d}} = \frac{\hat{y}_i}{\hat{y}_{i+1}} = q}$$ und

(M 13.26) $$\boxed{\mathrm{e}^{n\delta T_\mathrm{d}} = \frac{\hat{y}_i}{\hat{y}_{i+n}} = q^n}$$

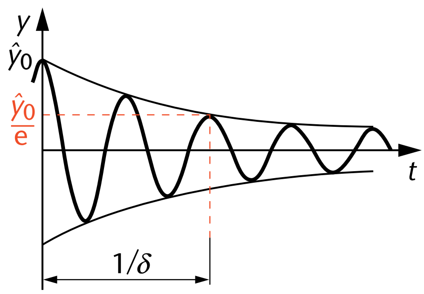
	δ	T
SI	$\frac{1}{\mathrm{s}}$	s

M

Den Exponenten δT_d bezeichnet man als **logarithmisches Dekrement** $\varLambda$. Aus (M 13.25) erhält man durch Logarithmieren

(M 13.27) $$\boxed{\varLambda = \delta T_\mathrm{d} = \ln \frac{\hat{y}_i}{\hat{y}_{i+1}} = \ln q}$$ Einheiten → (M 13.26)

■ Die Amplituden nehmen exponentiell mit der Zeit ab. Die für den Rückgang auf den e-ten Teil des Anfangswertes erforderliche Zeit heißt **Abklingzeit** τ. Aus (M 13.21) folgt mit $y = \hat{y}_0/\mathrm{e} = \hat{y}_0\,\mathrm{e}^{-\delta\tau}$



(M 13.28) $$\boxed{\tau = \frac{1}{\delta}}$$

Für die **Halbwertszeit** T_H, also die Zeit, in der die Amplitude auf die Hälfte ihres Anfangswertes sinkt, folgt aus (M 13.21)

$\dfrac{\hat{y}_0}{2} = \hat{y}_0\,\mathrm{e}^{-\delta T_\mathrm{H}}$. Logarithmieren ergibt $\ln 2 = \delta T_\mathrm{H}$ und daraus

(M 13.28a) $$\boxed{T_\mathrm{H} = \frac{\ln 2}{\delta}}$$

13.3.3 Eigenfrequenz

Die Dämpfung bewirkt eine vom Abklingkoeffizienten δ abhängige Veränderung von Frequenz, Kreisfrequenz und Schwingungsdauer.

Wenn

ω_d Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung $= 2\pi f_\mathrm{d} = 2\pi/T_\mathrm{d}$,

ω_0 Kreisfrequenz der gleichen, jedoch ungedämpften Schwingung $= 2\pi f_0 = 2\pi/T_0 = \sqrt{k/m}$,