

Leseprobe

Michael Knorrenschild

Vorkurs Mathematik

Ein Übungsbuch für Fachhochschulen

ISBN (Buch): 978-3-446-43798-2

ISBN (E-Book): 978-3-446-43628-2

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-43798-2>

sowie im Buchhandel.

4.12 Lineare Ungleichungen

Lineare Ungleichungen lassen sich genauso wie lineare Gleichungen behandeln, wenn wir beachten, dass beim Multiplizieren mit negativen Zahlen das Ungleichungszeichen umgekehrt werden muss.

Wir hatten schon die Gleichung $3x - 3 = 7 - 2x$ gelöst:

$$3x - 3 = 7 - 2x \iff 3x + 2x = 7 + 3 \iff 5x = 10 \iff x = 2$$

Vollkommen analog können wir die Ungleichung $3x - 3 < 7 - 2x$ lösen:

$$3x - 3 < 7 - 2x \iff 3x + 2x < 7 + 3 \iff 5x < 10 \iff x < 2$$

Hier muss das $<$ -Zeichen nicht umgekehrt werden, da wir nur durch die positive Zahl 5 dividieren. Wir haben damit:

Die Lösungsmenge von $3x - 3 < 7 - 2x$ ist $\mathbb{L} = (-\infty, 2)$.

Wir können die Ungleichung auch mit anderen Umformungen lösen, so dass eine Division durch eine negative Zahl nötig ist:

$$3x - 3 < 7 - 2x \iff -3 - 7 < -2x - 3x \iff -10 < -5x \iff 2 > x$$

Hier musste das $<$ -Zeichen umgekehrt werden, da wir durch die negative Zahl -5 dividiert haben. Das Ergebnis ist wie erwartet das gleiche wie vorher.

Auf demselben Weg erhält man auch:

Die Lösungsmenge von $3x - 3 > 7 - 2x$ ist $\mathbb{L} = (2, \infty)$.

Bei der Lösung linearer Ungleichungen sind nur Multiplikationen und Divisionen mit konstanten Größen erforderlich. Das Vorzeichen dieser Größen ist dann unabhängig von x , sodass keine Fallunterscheidungen auftreten, es sei denn, es handelt sich um einen Parameter.

Beispiel 4.14

Zu bestimmen ist die Lösungsmenge von $ax - 3 < 5x$, wobei $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

Lösung: Wir gehen anfangs wie bei Gleichungen vor, müssen aber am Ende eine Fallunterscheidung vornehmen, da wir den Parameter a nicht kennen.

$$\begin{aligned} ax - 3 < 5x &\iff ax - 5x < 3 \iff (a - 5)x < 3 \\ &\iff \begin{cases} x < \frac{3}{a - 5} & \text{falls } a - 5 > 0 \\ x > \frac{3}{a - 5} & \text{falls } a - 5 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Im Fall $a = 5$ ist die Ungleichung offensichtlich (einfach a durch 5 ersetzen) äquivalent zu $0 < 3$; diese Aussage ist wahr für alle $x \in \mathbb{R}$. Wenn Ihnen dieses Ergebnis befremdlich erscheint, versuchen Sie einfach ein $x \in \mathbb{R}$ zu finden, für das die Aussage $0 < 3$ nach Einsetzen Ihres x -Wertes falsch wird. Sie werden keinen Erfolg haben, daher ist die Aussage für alle $x \in \mathbb{R}$ wahr.

Insgesamt haben wir also erhalten:

Die Lösungsmenge von $ax - 3 < 5x$ ist

$$\mathbb{L} = \begin{cases} \left(-\infty, \frac{3}{a-5}\right) & \text{falls } a > 5 \\ \mathbb{R} & \text{falls } a = 5 \\ \left(\frac{3}{a-5}, \infty\right) & \text{falls } a < 5 \end{cases}$$

■

Bemerkung: Die Lösungsmenge einer Ungleichung enthält in der Regel unendlich viele Elemente. Eine Probe, indem man die berechneten Lösungen in die Ungleichung einsetzt und prüft, ob sie erfüllt ist, ist daher nicht durchführbar. Man könnte dies für einzelne Werte überprüfen, aber das Ergebnis dieser Prüfung liefert dann auch keine wirkliche Sicherheit, ob man richtig gerechnet hat. Es empfiehlt sich daher, beim Lösen von Ungleichungen stets besonders sorgfältig zu Werke zu gehen.

4.13 Ungleichungen mit Brüchen

Hier kommt die Unbekannte x im Nenner vor. Die Lösung einer solchen Ungleichung erfordert (vgl. Abschnitt 4.3) die Multiplikation mit dem Nenner, dessen Vorzeichen häufig von x abhängt, sodass eine Fallunterscheidung notwendig wird. Wir betrachten die beiden Beispiele aus Abschnitt 4.3.

Beispiel 4.15

Zu bestimmen ist die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{x+52}{x+2} < 11$.

Lösung: Da sofort die Multiplikation mit dem Nenner $x+2$ ansteht und wir dessen Vorzeichen nicht kennen, müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

1. Fall: $x+2 > 0$, also $x > -2$: Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{x+52}{x+2} < 11 &\iff x+52 < 11(x+2) = 11x+22 \\ &\iff -10x < -30 \iff x > 3. \end{aligned}$$

Wir lesen daraus ab: Wenn $x > 3$ ist, und wir im ersten Fall sind, dann erfüllt x die ursprüngliche Ungleichung. Mit anderen Worten: Wenn $x > 3$ gilt und $x > -2$, dann ist die Ungleichung erfüllt. Die Bedingung $x > 3 \wedge x > -2$ ist äquivalent zu $x > 3$. Dies kann man sich leicht an der Zahlengeraden klar

machen. Wir haben damit schon einen Teil der Lösungsmenge bestimmt:
 $\mathbb{L}_1 = (3, \infty)$.

2. Fall: $x + 2 < 0$, also $x < -2$: Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{x + 52}{x + 2} < 11 &\iff x + 52 > 11(x + 2) = 11x + 22 \\ &\iff -10x > -30 \iff x < 3. \end{aligned}$$

Für alle x mit $x < -2$ und $x < 3$ ist die Ungleichung also erfüllt. Mithilfe der Zahlengeraden (falls nötig) überlegt man sich dann, dass die Ungleichung für alle $x \in \mathbb{L}_2 = (-\infty, -2)$ erfüllt ist.

Jedes x , für das die Ungleichung definiert ist, erfüllt das Kriterium des ersten oder des zweiten Falls (man beachte hier das „oder“). Daher gilt insgesamt: x erfüllt die Ungleichung $\iff x \in \mathbb{L}_1$ oder $x \in \mathbb{L}_2 \iff x > 3 \vee x < -2 \iff x \in \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$.

Wir können die Lösungsmenge auch schreiben als $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus [-2, 3]$, woraus man gleich sieht, dass die Ungleichung genau für alle $x \in [-2, 3]$ *nicht* erfüllt ist. ■

Aufgabe

4.10 Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \frac{6x - 24}{x - 4} > 4 & \text{b)} \quad \frac{6x - 24}{x - 4} < 4 & \text{c)} \quad \frac{3x - 5}{x - 2} \leq 3 \\ \text{d)} \quad \frac{-7x + 1}{2x + 1} \leq 1 & \text{e)} \quad \frac{-x - 4}{2x + 3} < 2 & \text{f)} \quad \frac{3x - 2}{-5x + 2} < 1 \end{array}$$

4.14 Ungleichungen mit Beträgen

Hier erwarten wir in größerem Umfang als bei Gleichungen Fallunterscheidungen, da zum Auflösen der Ungleichung noch das Auflösen der Beträge erforderlich ist. In einfachen Fällen kann man aber mithilfe der Zahlengeraden noch Fallunterscheidung vermeiden.

Beispiel 4.16

Zu bestimmen ist die Lösungsmenge der Ungleichung $|2x + 3| < 5$.

Lösung: Wir dividieren durch 2, um den Faktor bei x zu eliminieren:

$$|2x + 3| < 5 \iff \frac{1}{2}|2x + 3| < 2.5 \iff |x + 1.5| < 2.5$$

Nun erinnern wir uns daran, dass der Betrag die Abstandsfunktion auf der

Zahlengeraden ist: $|a - b|$ ist der Abstand der Zahlen a und b auf der Zahlengeraden. Wir suchen nun die x -Werte, für die $|x + 1.5| < 2.5$ ist, d. h. $|x - (-1.5)| < 2.5$. Das sind genau die x -Werte, für die der Abstand von -1.5 kleiner als 2.5 ist. Man denkt sich also einen Kreis um 1.5 auf der Zahlengeraden mit Radius 2.5 ; dieser Kreis schneidet die Zahlengerade bei $-1.5 + 2.5 = 1$ und bei $-1.5 - 2.5 = -4$, siehe Bild 4.1.

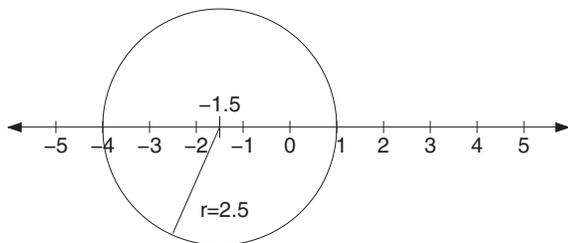


Bild 4.1

Alle Zahlen auf der Zahlengeraden innerhalb dieses Kreises bilden unsere Lösungsmenge, also $\mathbb{L} = (-4, 1)$. Die Punkte auf der Kreislinie, also $x = 1$ und $x = -4$, gehören nicht zur Lösungsmenge. Diese beiden Punkte sind die Lösung der Gleichung $|2x + 3| = 5$, siehe auch Beispiel 4.2. ■

Beispiel 4.17

Zu bestimmen ist die Lösungsmenge der Ungleichung $|-2x + 3| < 5$.

Lösung: Auch hier dividieren wir zuerst durch 2 und erhalten:

$$|-2x + 3| < 5 \iff \frac{1}{2}|-2x + 3| < 2.5 \iff |-x + 1.5| < 2.5$$

Man könnte nun sagen, wir suchen die x -Werte, für die $-x$ von -1.5 einen Abstand kleiner als 2.5 hat, aber was hilft uns das? Einfacher ist es, wir besinnen uns auf $|-x + 1.5| = |-(x - 1.5)| = |x - 1.5|$, woran wir erkennen, dass wir die x -Werte suchen, deren Abstand von 1.5 kleiner als 2.5 ist. An der Zahlengeraden wird dann klar, dass $\mathbb{L} = (-1, 4)$ ist. ■

Aufwändiger wird die Bestimmung der Lösung, wenn in der Ungleichung zwei oder mehr Ausdrücke mit Beträgen vorkommen. Jeder der Ausdrücke innerhalb der Betragsstriche kann positiv oder negativ sein, erfordert also eine eigene Fallunterscheidung. Am zweckmäßigsten ist es, wenn man für jeden einzelnen Ausdruck feststellt, für welche x er das Vorzeichen wechselt; diese x -Werte wollen wir als kritische Werte bezeichnen. Die Gesamtheit aller kritischen Werte teilt die Zahlengerade in Intervalle ein, auf denen jeweils das Vorzeichen aller Ausdrücke konstant ist. Diese Intervalle legen die Fälle fest, die betrachtet werden müssen. Das folgende Beispiel wird das verdeutlichen.