HANSER

Leseprobe

Edgar Dietrich, Alfred Schulze

Statistische Verfahren zur Maschinen- und Prozessqualifikation

ISBN (Buch): 978-3-446-44055-5

ISBN (E-Book): 978-3-446-44024-1

## 6.6 Tests auf Ausreißer

Ausreißer sind Extremwerte in einer Stichprobe, die unnatürlich weit von den anderen Merkmalswerten entfernt liegen und bei denen daher angenommen werden muss, **dass sie nicht aus derselben Grundgesamtheit stammen wie die übrigen Werte.**

Ausreißer müssen die Ausnahme sein. Wird beim Auswerten derselben Merkmale immer wieder ein „Ausreißer" gefunden, so stimmt vermutlich die vorausgesetzte Verteilungsform nicht.

Die beiden folgenden Testverfahren auf Ausreißer setzen daher voraus, dass die Merkmalswerte aus einer normalverteilten Grundgesamtheit stammen. Dies ist erfahrungsgemäß bekannt oder wird durch einen entsprechenden Test überprüft.

Auch und gerade bei der vollelektronischen Messwerterfassung und -auswertung kann auf solche Testverfahren nicht verzichtet werden. Die Ursachen für Ausreißer sind vielfältig:

- zu früh betätigte Taster bei der Messwertübernahme
- hängen gebliebene Messwertaufnehmer
- elektrische Störimpulse
- mechanische Erschütterungen
- Schmutz am Prüfobjekt
- etc.

Gefundene Ausreißer können in begründeten Fällen für die Auswertung eliminiert werden. Die Werte selbst sollten erhalten bleiben und mit einer Bemerkung versehen werden.

**Hinweis:**

In der Praxis gibt es immer wieder Diskussionen, ob Ausreißer automatisch für eine Auswertung aufgrund der Ergebnisse eines „Tests auf Ausreißer" entfernt werden sollen oder nicht. Prinzipiell ist von einer automatischen Eliminierung von Messwerten abzusehen. Kennt man allerdings einen Prozess sehr genau und sind die Ursachen für einen Ausreißer bekannt, kann man durchaus vom oben genannten Prinzip abweichen. Oftmals sind sogar keine Testverfahren erforderlich, um Ausreißer zu erkennen. Über- oder unterschreitet beispielsweise ein Messwert eine vordefinierte Plausibilitätsgrenze, so kann dieser als Ausreißer angesehen und für die Auswertung eliminiert werden.

**Test auf Ausreißer nach David, Hartley und Pearson**

| **Nullhypothese $H_0$** | **Alternativhypothese $H_1$** |
|---|---|
| Weder der Größtwert $x_{max}$ noch der Kleinstwert $x_{min}$ ist ein Ausreißer. | Entweder der Größtwert $x_{max}$ oder der Kleinstwert $x_{min}$ ist ein Ausreißer. |

| Alternativhypothese $H_1$ | Die Nullhypothese $H_0$ wird zugunsten der Alternativhypothese $H_1$ verworfen, falls | | |
|---|---|---|---|
| | Prüfgröße | | kritischer Wert |
| s.o. | $\frac{R}{s}$ | > | $A_{1-\alpha;n}$ s. [37] |

Sollte die Nullhypothese verworfen werden, so ist der Extremwert mit dem größeren Abstand zum arithmetischen Mittelwert ein Ausreißer. Nur bei gleichem Abstand beider Extremwerte zum Mittelwert werden aufgrund einmaliger Prüfung beide Werte zugleich als Ausreißer erkannt. Wird ein Wert als Ausreißer eliminiert, so ist der Test mit den verbleibenden Werten zu wiederholen.

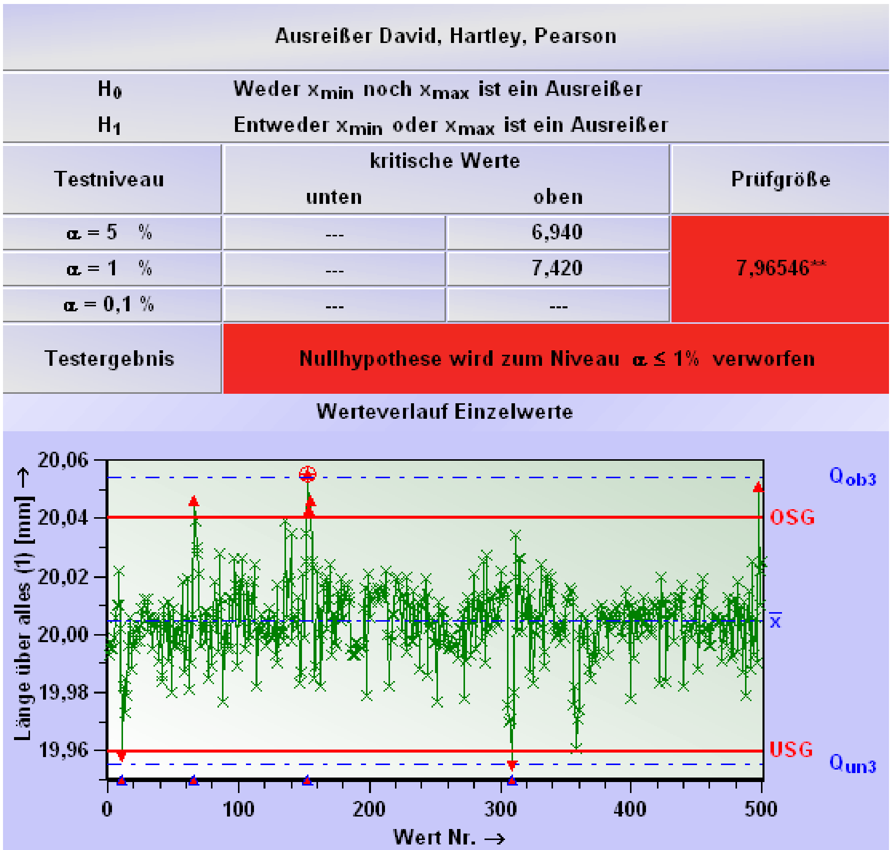


*Abbildung 6.6-1: Test auf Ausreißer nach David, Hartley, Pearson*

Für den vorliegenden Datensatz ergibt sich als Prüfgröße 7,96546. Verglichen mit den kritischen Werten des Tests auf Ausreißer nach David, Hartley, Pearson ist das Ergebnis „Nullhypothese wird zum Niveau $\alpha \leq 1\%$ verworfen".

### Test auf Ausreißer nach Grubbs

| **Nullhypothese $H_0$** | | **Alternativhypothese $H_1$** | |
|---|---|---|---|
| Der Kleinstwert bzw. der Größtwert ist kein Ausreißer. | | Der Kleinstwert bzw. der Größtwert ist ein Ausreißer. | |
| Alternativhypothese $H_1$ | Die Nullhypothese $H_0$ wird zugunsten der Alternativhypothese $H_1$ verworfen, falls | | |
| | Prüfgröße | | kritischer Wert |
| s.o. einseitig für Kleinstwert $x_{(1)}$ | $\frac{\bar{x}-x_{(1)}}{s}$ | > | $B_{1-\alpha;n}$ |
| s.o. einseitig für Größtwert $x_{(n)}$ | $\frac{x_{(n)}-\bar{x}}{s}$ | > | $B_{1-\alpha;n}$ s. [37] |

Wird ein Ausreißer festgestellt, so ist die vollständige Auswertung mit den restlichen Werten zu wiederholen.

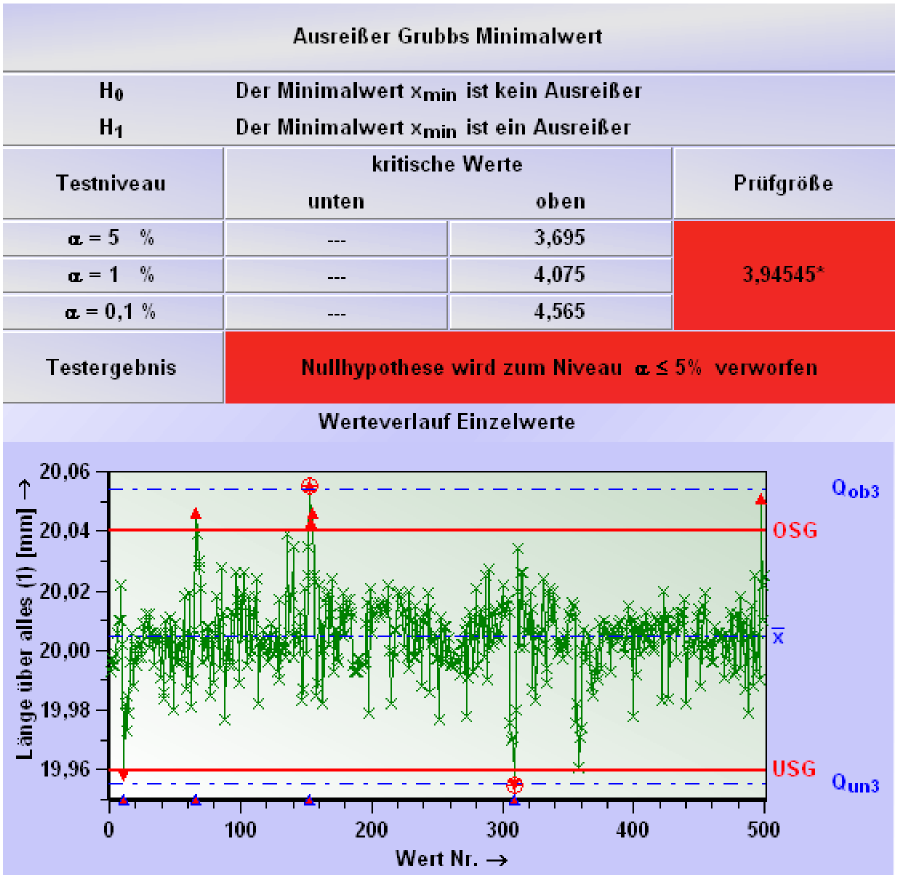


*Abbildung 6.6-2: Test auf Ausreißer nach Grubbs*

Für den vorliegenden Datensatz ergibt sich als Prüfgröße 3,94545. Verglichen mit dem kritischen Wert des Tests auf Ausreißer nach Grubbs ist das Ergebnis „Nullhypothese wird zum Niveau $\alpha \leq 5\%$ verworfen“.

### Hampel-Test

Die Hauptursache für das Versagen des Grubbs-Tests ist die Schätzung des Mittelwerts und der Standardabweichung. Extreme Beobachtungen, d.h. potentielle Ausreißer, haben einen enormen Effekt auf diese Werte. Besser wäre es demnach, robuste Schätzungen zu verwenden. Anstatt des Mittelwerts liegt es nahe, den Median zu wählen. Auch für die Streuung existiert ein robuster Schätzer, der sogenannte MAD (Median der absoluten Abweichungen vom Median oder Median Absolute Deviation). Bezeichnet m = median ($x_i$, ..., $x_n$) den Median der Stichprobe $x_i$, ..., $x_n$, dann ist der MAD definiert als:

$$\text{MAD}(x_i, \ldots, x_n) = \text{median}(|x_i - m|, \ldots, |x_n - m|)/0{,}6745.$$

Damit der MAD die Standardabweichung schätzt, muss dabei durch die Konstante 0,6745 dividiert werden. Die neue Teststatistik ist dann:

$$\bar{R}_i = \frac{|x_i - m|}{\text{MAD}}$$

Dieser Test wurde von Hampel untersucht und wird deshalb Hampel-Test genannt. Seine Anwendung ist analog zum Grubbs-Test. Alle Beobachtungen, die im Ausreißerbereich begrenzt durch $m \pm T_{n,\alpha} \cdot \text{MAD}$ liegen, bezeichnet man als Ausreißer gemäß Hampel-Test. Die kritischen Schranken $T_{n,\alpha}$ wurden mit Hilfe von Simulationen bestimmt. Für Fehlerwahrscheinlichkeiten $\alpha$ = 5 % und $\alpha$ = 1 % sind solche Werte für verschiedene Stichprobenumfänge n in Tabelle 14.3-10 aufgeführt. Als allgemein gültige grobe Faustregel kann für die kritische Schranke der Wert 5 verwendet werden.

Für den vorliegenden Datensatz ergibt sich als Prüfgröße 4,23971. Verglichen mit den kritischen Werten des Tests nach Hampel ist das Ergebnis „Nullhypothese wird zum Niveau $\alpha \leq 5\%$ verworfen“.

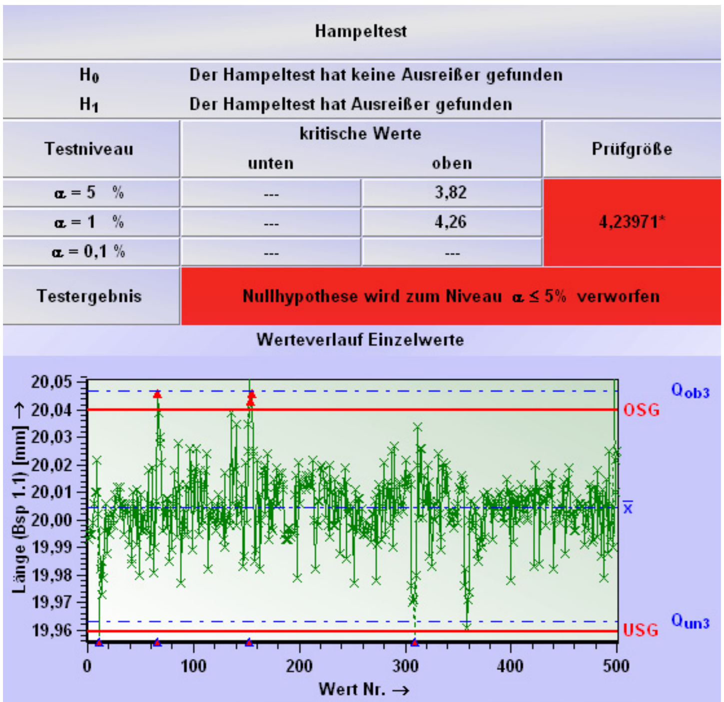


*Abbildung 6.6-3: Test nach Hampel*

## 6.7 Vergleich von Varianzen und Mittelwerten

Werden Messwerte von unterschiedlichen Lieferungen und Losen sowie die Fertigung von gleichen Teilen auf verschiedenen Maschinen bzw. in unterschiedlichen Zeiträumen erfasst, so repräsentieren diese den entsprechenden Sachverhalt. Dabei stellt sich die Frage, ob sich beispielsweise die Varianz aufgrund der unterschiedlichen Situationen verändert hat oder nicht. Dazu gibt es Testverfahren, die die Gleichheit der Varianz aus zwei bzw. mehr Stichproben untersuchen.

Analog dazu kann gefragt werden, ob die Mittelwerte zweier Grundgesamtheiten gleich sind oder nicht. Dabei wird zusätzlich unterschieden, ob die Varianzen der Grundgesamtheiten

- unbekannt und gleich,
- unbekannt und ungleich

sind.

### 6.7.1 Normalverteilte Messwertreihen

Für normalverteilte Messwertreihen ergeben sich je nach Aufgabenstellung folgende Testverfahren:

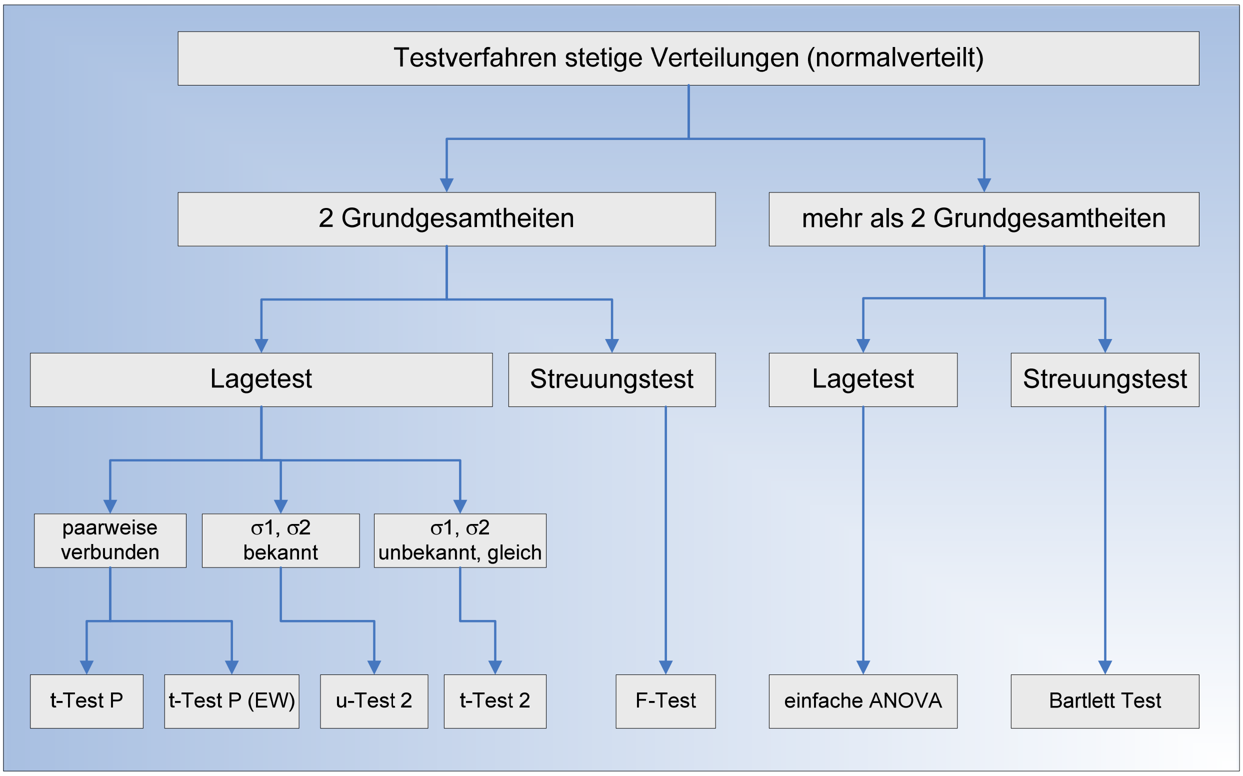


*Abbildung 6.7-1: Testverfahren stetige Verteilungen (normalverteilt)*

### Vergleich der Varianzen von zwei Grundgesamtheiten (F-Test)

Aufgrund zweier Stichprobenvarianzen $s_A^2$ und $s_B^2$ soll überprüft werden, ob sich die Varianzen der beiden Grundgesamtheiten wesentlich voneinander unterscheiden. Dieses Testverfahren wird auch als F-Test bezeichnet. Dieses Verfahren wird bei der Prozessanalyse verwendet, um durch die Analyse von Varianzen festzustellen, ob der Mittelwert der Grundgesamtheit über die Zeit als konstant angesehen werden kann.

| **Nullhypothese $H_0$** | **Alternativhypothese $H_1$** |
|---|---|
| $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ bzw. $\sigma_A^2 \ge \sigma_B^2$ | $\sigma_A^2 \ne \sigma_B^2$ bzw. $\sigma_A^2 < \sigma_B^2$ |

| Alternativhypothese $H_1$ | Die Nullhypothese $H_0$ wird zugunsten der Alternativhypothese $H_1$ verworfen, falls | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Prüfgröße | | kritischer Wert | |
| $\sigma_A^2 \ne \sigma_B^2$ zweiseitig | $\frac{s_A^2}{s_B^2}$ | > | $F_{1-\frac{\alpha}{2};\, f_1;\, f_2}$ | $f_1 = n_A - 1$ |
| $\sigma_A^2 > \sigma_B^2$ einseitig | $\frac{s_A^2}{s_B^2}$ | > | $F_{1-\alpha;\, f_1;\, f_2}$ | $f_2 = n_B - 1$ |

**Hinweis:**

Die Indizierung ist immer so zu wählen, dass $s_A^2$ **die größere Varianz** zugeordnet wird.

| F-Test | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Teilnr. | | 1 | | Teilnr. | | 1 | |
| Teilebez. | | Positionstoleranzen | | Teilebez. | | Positionstoleranzen | |
| Merkm.Nr. | | 1.x | | Merkm.Nr. | | 1 | |
| Merkm.Bez. | | 1.x-Position | | Merkm.Bez. | | Position 1 | |
| Verteilung | | Normalverteilung | | Verteilung | | Normalverteilung | |
| $n_{eff}$ | 40 | $\bar{x}$ | 0,00925 | $n_{eff}$ | 40 | $\bar{x}$ | 0,02606 |
| $s^2$ | 0,00036865 | s | 0,019200 | $s^2$ | 0,00015820 | s | 0,012578 |
| $H_0$ | Varianzen der Grundgesamtheiten sind gleich | | | | | | |
| $H_1$ | Varianzen der Grundgesamtheiten sind NICHT gleich | | | | | | |
| Testniveau | kritische Werte unten | kritische Werte oben | Prüfgröße | | | | |
| $\alpha = 5\ \%$ | 0,53 | 1,89 | 2,33038** | | | | |
| $\alpha = 1\ \%$ | 0,43 | 2,32 | | | | | |
| $\alpha = 0{,}1\ \%$ | 0,34 | 2,96 | | | | | |
| Testergebnis | Nullhypothese wird zum Niveau $\alpha \le 1\%$ verworfen | | | | | | |

*Abbildung 6.7-2: F-Test*

Für den vorliegenden Datensatz ergibt sich als Prüfgröße 2,33038. Verglichen mit den kritischen Werten des F-Tests ist das Ergebnis „Nullhypothese wird zum Niveau $\alpha \le 1\%$ verworfen“.

### Vergleich der Varianzen mehrerer Grundgesamtheiten (Bartlett-Test)

| **Nullhypothese $H_0$** | **Alternativhypothese $H_1$** |
|---|---|
| $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_k^2 = \sigma^2$ | $\sigma_i^2 \neq \sigma_j^2$ für mindestens ein Paar (i, j) |
| Voraussetzung: $f_i \geq 5$ | |

| Alternativ-hypothese $H_1$ | Die Nullhypothese $H_0$ wird zugunsten der Alternativhypothese $H_1$ verworfen, falls | | |
|---|---|---|---|
| | Prüfgröße | | kritischer Wert |
| s.o. | $-\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{k} f_i \ln\frac{s_i^2}{s^2}$ | $>$ | $\chi^2_{k-1;1-\alpha}$ |
| mit | $f_i = k_i$<br>$c = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{f_i} - \frac{1}{f_g}\right)$<br>$f_g = \sum_{i=1}^{k} f_i$<br>$s^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot s_i^2\right) / f_g$ | | |

| Vergleich der Varianzen von mehr als zwei Normal-Verteilungen (Bartlett-Test) | | | |
|---|---|---|---|
| Bartlett Test | | | |
| $H_0$ | Die Varianzen der Grundgesamtheiten sind gleich | | |
| $H_1$ | Die Varianzen der Grundgesamtheiten sind NICHT gleich (für mindestens ein Paar) | | |
| Testniveau | kritische Werte unten | kritische Werte oben | Prüfgröße |
| $\alpha$ = 5 % | --- | 9,49 | 5,31528 |
| $\alpha$ = 1 % | --- | 13,28 | |
| $\alpha$ = 0,1 % | --- | 18,47 | |
| Testergebnis | Nullhypothese wird nicht widerlegt | | |

| GG | aktiv | Bezeichnung | n | Mittelwert | Standardabweichung | Varianz |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X | Ch.1 | 400 | 0,0082025000 | 0,0989474000 | 0,0097905880 |
| 2 | X | Ch.2 | 400 | -0,0030050000 | 0,1035019401 | 0,0107126516 |
| 3 | X | Ch.3 | 400 | 0,0012675000 | 0,0978747138 | 0,0095794596 |
| 4 | X | Ch.4 | 400 | 0,0026450000 | 0,1067120078 | 0,0113874526 |
| 5 | X | Ch.5 | 400 | -0,0003250000 | 0,1067180924 | 0,0113887513 |

*Abbildung 6.7-3 Bartlett-Test*

**Vergleich der Mittelwerte zweier Grundgesamtheiten, bei der die Varianzen unbekannt und ungleich sind (t-Test)**

| **Nullhypothese $H_0$** | | | **Alternativhypothese $H_1$** | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mu_A = \mu_B$ | $\mu_A \le \mu_B$ | $\mu_A \ge \mu_B$ | $\mu_A \ne \mu_B$ | $\mu_A > \mu_B$ | $\mu_A < \mu_B$ |

Berechnung der Hilfsgröße: $s_d = \sqrt{\frac{s_A^2}{n_1} + \frac{s_B^2}{n_2}}$

| Alternativhypothese $H_1$ | Die Nullhypothese $H_0$ wird zugunsten der Alternativhypothese $H_1$ verworfen, falls | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Prüfgröße | | kritischer Wert | |
| $\mu_A \ne \mu_B$ zweiseitig | $\frac{\lvert \overline{x}_A - \overline{x}_B \rvert}{s_d}$ | $>$ | $t_{1-\frac{\alpha}{2};\,f}$ | $\frac{1}{f} = \frac{c^2}{n_A - 1} + \frac{(1-c)^2}{n_B - 1}$ |
| $\mu_A > \mu_B$ einseitig | $\frac{\overline{x}_A - \overline{x}_B}{s_d}$ | $>$ | $t_{1-\alpha;\,f}$ | mit |
| $\mu_A < \mu_B$ einseitig | $\frac{\overline{x}_A - \overline{x}_B}{s_d}$ | $<$ | $-t_{1-\alpha;\,f}$ | $c = \frac{\frac{s_A^2}{n_A}}{\left(\frac{s_A^2}{n_A}\right) + \left(\frac{s_B^2}{n_B}\right)}$ |

| t-Test | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Teilnr. | 1 | | | Teilnr. | 1 | | |
| Teilebez. | Positionstoleranzen | | | Teilebez. | Positionstoleranzen | | |
| Merkm.Nr. | 1.x | | | Merkm.Nr. | 1.y | | |
| Merkm.Bez. | 1.x-Position | | | Merkm.Bez. | 1.y-Position | | |
| Verteilung | Normalverteilung | | | Verteilung | Normalverteilung | | |
| $n_{eff}$ | 40 | $\overline{x}$ | 0,00925 | $n_{eff}$ | 40 | $\overline{x}$ | 0,00137 |
| $s^2$ | 0,00036865 | s | 0,019200 | $s^2$ | 0,00039614 | s | 0,019903 |
| $H_0$ | Mittelwerte der Grundgesamtheiten sind gleich | | | | | | |
| $H_1$ | Mittelwerte der Grundgesamtheiten sind NICHT gleich | | | | | | |

| Testniveau | kritische Werte unten | kritische Werte oben | Prüfgröße |
|---|---|---|---|
| $\alpha$ = 5 % | --- | 1,99 | 1,80098 |
| $\alpha$ = 1 % | --- | 2,64 | |
| $\alpha$ = 0,1 % | --- | 3,42 | |
| Testergebnis | Nullhypothese wird nicht widerlegt | | |

*Abbildung 6.7-4: t-Test*

Für den vorliegenden Datensatz ergibt sich als Prüfgröße 1,80098. Verglichen mit den kritischen Werten des t-Tests ist das Ergebnis „Nullhypothese wird nicht widerlegt“.

**Vergleich der Mittelwerte mehrerer Grundgesamtheiten mit unbekannten, aber als gleich vorausgesetzten Varianzen $\sigma^2$ (einfache ANOVA)**

| **Nullhypothese $H_0$** | **Alternativhypothese $H_1$** |
|---|---|
| $\mu_1 = \mu_2 = \ldots \mu_k = \mu$ | $\mu_i \neq \mu_j$ für mindestens ein Paar (i, j) |

| Alternativ-hypothese $H_1$ | Die Nullhypothese $H_0$ wird zugunsten der Alternativhypothese $H_1$ verworfen, falls | | |
|---|---|---|---|
| | Prüfgröße | | kritischer Wert |
| s.o. | $\dfrac{(n-k)\sum_{i=1}^{k}\left(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}\right)^2 n_i}{(k-1)\sum_{i=1}^{k} s_i^2 (n_i - 1)}$ | $>$ | $F_{1-\alpha;f_1;f_2}$ $\quad f_1 = k-1$, $f_2 = n-k$ |
| mit | $\bar{\bar{x}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \bar{x}_i$ | | |

| Vergleich der Erwartungswerte von mehr als zwei Normal-Verteilungen einfache ANOVA | | | |
|---|---|---|---|
| $H_0$ | Die Erwartungswerte der Grundgesamtheiten sind gleich | | |
| $H_1$ | Die Erwartungswerte der Grundgesamtheiten sind NICHT gleich (für mindestens ein Paar) | | |
| Testniveau | kritische Werte unten | kritische Werte oben | Prüfgröße |
| $\alpha = 5$ % | --- | 2,38 | 14,4194*** |
| $\alpha = 1$ % | --- | 3,33 | |
| $\alpha = 0{,}1$ % | --- | 4,64 | |
| Testergebnis: Nullhypothese wird zum Niveau $\alpha \leq 0{,}1\%$ verworfen | | | |

| GG | aktiv | Bezeichnung | n | Mittelwert | Standardabweichung | Varianz |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X | Ch.1 | 300 | -0,0024366667 | 0,0996243076 | 0,0099250027 |
| 2 | X | Ch.2 | 300 | 0,0149000000 | 0,1009830775 | 0,0101975819 |
| 3 | X | Ch.3 | 300 | 0,0270666667 | 0,1004567939 | 0,0100915674 |
| 4 | X | Ch.4 | 300 | 0,0436933333 | 0,0992055025 | 0,0098417317 |
| 5 | X | Ch.5 | 300 | 0,0521866667 | 0,1001556238 | 0,0100311490 |

*Abbildung 6.7-5: einfache ANOVA*

**Vergleich der Mittelwerte zweier Grundgesamtheiten, bei denen die Varianzen unbekannt, aber gleich sind (Zweistichproben t-Test)**

| Nullhypothese $H_0$ | | | Alternativhypothese $H_1$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mu_A = \mu_B$ | $\mu_A \le \mu_B$ | $\mu_A \ge \mu_B$ | $\mu_A \ne \mu_B$ | $\mu_A > \mu_B$ | $\mu_A < \mu_B$ |

Berechnung der Hilfsgröße:

$$s_d = \sqrt{\frac{(n_A - 1)\cdot s_A^2 + (n_B - 1)\cdot s_B^2}{n_A + n_B - 2} \cdot \frac{n_A + n_B}{n_A \cdot n_B}}$$

falls $n_A = n_B = n$:

$$s_d = \sqrt{\frac{s_A^2 + s_B^2}{n}}$$

| Alternativhypothese $H_1$ | Die Nullhypothese $H_0$ wird zugunsten der Alternativhypothese $H_1$ verworfen, falls | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Prüfgröße | | kritischer Wert | |
| $\mu_A \ne \mu_B$ zweiseitig | $\frac{\lvert\bar{x}_A - \bar{x}_B\rvert}{s_d}$ | $>$ | $t_{1-\frac{\alpha}{2};\, f}$ | $f = n_A + n_B - 2$ |
| $\mu_A > \mu_B$ einseitig | $\frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{s_d}$ | $>$ | $t_{1-\alpha;\, f}$ | $f = n_A + n_B - 2$ |
| $\mu_A < \mu_B$ einseitig | $\frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{s_d}$ | $<$ | $-t_{1-\alpha;\, f}$ | $f = n_A + n_B - 2$ |

Vergleich der Erwartungswerte von zwei Normalverteilungen (Varianzen der Grundgesamtheiten sind unbekannt)

t-Test 2

| Ch.1 | | | | Ch.2 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}$ | 0,000 | $n_{eff}$ | 500 | $\bar{x}$ | 0,016 | $n_{eff}$ | 500 |
| s | 0,10137 | $s^2$ | 0,010275 | s | 0,10014 | $s^2$ | 0,010028 |

| | |
|---|---|
| $H_0$ | Die Erwartungswerte der Grundgesamtheiten sind gleich |
| $H_1$ | Die Erwartungswerte der Grundgesamtheiten sind NICHT gleich |

| Testniveau | kritische Werte unten | kritische Werte oben | Prüfgröße |
|---|---|---|---|
| α = 5 % | --- | 1,96 | $\frac{\lvert\bar{x}_1-\bar{x}_2\rvert}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s^2_1+(n_2-1)s^2_2}{n_1+n_2-2}\cdot\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}}$ 2,49957* |
| α = 1 % | --- | 2,58 | |
| α = 0,1 % | --- | 3,30 | |
| Testergebnis: Nullhypothese wird zum Niveau α ≤ 5% verworfen | | | |

P-Wert 1,25940 %

| Vertrauensniveau | Vertrauensgrenze unten | Vertrauensgrenze oben |
|---|---|---|
| 1 - α = 95 % | -0,028433 | -0,0034234 |
| 1 - α = 99 % | -0,032373 | 0,00051740 |
| 1 - α = 99,9 % | -0,036959 | 0,0051027 |

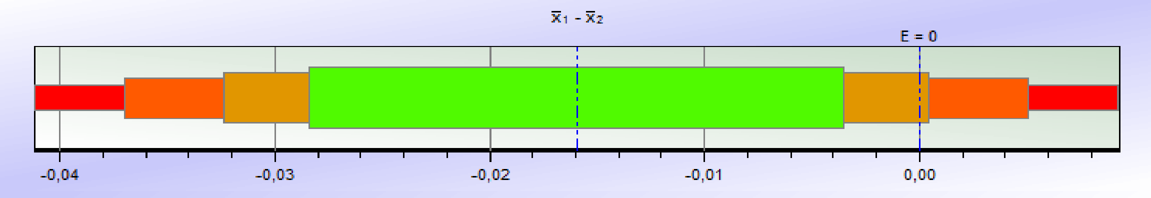


*Abbildung 6.7-6: Zweistichproben t-Test*