HANSER


Leseprobe

Daniel von Grünigen

Digitale Signalverarbeitung

mit einer Einführung in die kontinuierlichen Signale und Systeme

ISBN (Buch): 978-3-446-44079-1

ISBN (E-Book): 978-3-446-43991-7

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-44079-1

sowie im Buchhandel.

© Carl Hanser Verlag, München

# Kapitel 2

# Kontinuierliche Signale und Systeme

Gegenstand der DSV ist die digitale Verarbeitung von Signalen. Vor und nach ihrer digitalen Verarbeitung werden Signale jedoch vielfach analog verarbeitet und es ist daher sinnvoll, sich in den Grundlagen kontinuierlicher Signale und Systeme auszukennen. Zudem erleichtern Grundlagenkenntnisse in analoger Signalverarbeitung das Verständnis der DSV, so dass es zweckmässig ist, den Studierenden zunächst in die Theorie kontinuierlicher Signale und Systeme einzuführen.

## 2.1 Charakterisierung von Signalen

Zuerst wollen wir definieren, was ein Signal ist, und zeigen, wie Signale charakterisiert und eingeteilt werden können.

### 2.1.1 Elementarsignale

Unter einem *Elementarsignal* wollen wir eine Funktion $x(t)$ verstehen[1], die für die Theorie von grundlegender Bedeutung ist und die über eine Formel exakt definiert werden kann.

[1] Die Mathematiker unterscheiden zwischen einer Funktion $x$ und deren Funktionswert $x(t)$ in einem Punkt $t$ [Hub97]. Signalverarbeiter nehmen es hier weniger genau: Wenn sie $x(t)$ schreiben, meinen sie i. Allg. die Funktion $x$ und wollen mit der Schreibweise $x(t)$ sagen, dass sie eine Funktion der Zeitvariablen $t$ ist, wobei $t$ im Allgemeinen alle Werte auf der reellen Zeitachse annehmen kann.

Die in der Signalverarbeitung wohl wichtigste Funktion ist die Cosinusfunktion, auch Cosinusschwingung oder Cosinussignal genannt:

$$x(t) = \hat{X}\cos(2\pi f_0 t)\ , \tag{2.1}$$

wobei $\hat{X}$ die Amplitude oder der Scheitelwert, $f_0$ die Frequenz in Hertz (Hz), $\omega_0 = 2\pi f_0$ die Kreisfrequenz in $s^{-1}$ und $T_0 = 1/f_0$ die Periodendauer in $s$ ist. Ohne ausdrückliche Erwähnung werden die drei Parameter allgemein als positiv angenommen.

Die Cosinusfunktion um $\pi/2$ nach rechts verschoben ergibt die Sinusfunktion (Sinusschwingung, Sinussignal). Multipliziert man die Sinusfunktion mit der imaginären Zahl $j$ und addiert sie zur Cosinusfunktion, so erhält man gemäß Euler[2] die komplexe Exponentialfunktion oder komplexe Sinusschwingung (engl: complex sinusoid):

$$\begin{aligned} x(t) &= \hat{X}\cos(2\pi f_0 t) + j\hat{X}\sin(2\pi f_0 t)\ , \\ &= \hat{X}e^{j2\pi f_0 t}\ . \end{aligned} \tag{2.2}$$

$x(t)$ kann man sich als Drehzeiger (engl: phasor) mit der Länge $\hat{X}$ und dem Winkel $2\pi f_0 t$ vorstellen, der mit der Winkelgeschwindigkeit $2\pi f_0$ um den Ursprung der komplexen Ebene rotiert (Bild 2.1 und M-File `Drehzeiger` ). Ist $f_0$ positiv, dann rotiert der Zeiger mit der Frequenz $f_0$ im Gegenuhrzeigersinn, d. h. in positiver Drehrichtung; ist $f_0$ negativ, dann rotiert er mit der Frequenz $|f_0|$ im Uhrzeigersinn, d. h. in negativer Drehrichtung. Negative Frequenzen stehen somit für Rotationen der dazugehörigen Zeiger in negativer Drehrichtung.

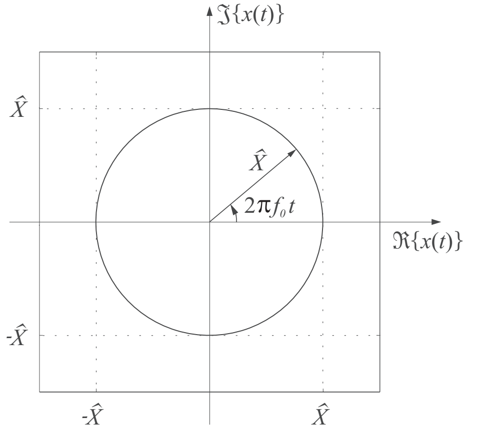


Bild 2.1: Die komplexe Exponentialfunktion als Drehzeiger

[2]Leonhard Euler, Schweizer Mathematiker, 1707–1783

Zwei weitere Funktionen, die in der Signalverarbeitung häufig vorkommen, sind die Rechteckfunktion

$$\mathrm{rect}(\frac{t}{T_0}) = \begin{cases} 0 & : \quad |t| > T_0/2 \\ 1 & : \quad |t| < T_0/2 \end{cases} \tag{2.3}$$

und die Sinc- oder Spaltfunktion

$$\mathrm{sinc}(\frac{t}{T_0}) = \frac{\sin(\pi t/T_0)}{\pi t/T_0} \;, \tag{2.4}$$

die beide in Bild 2.2 dargestellt sind.

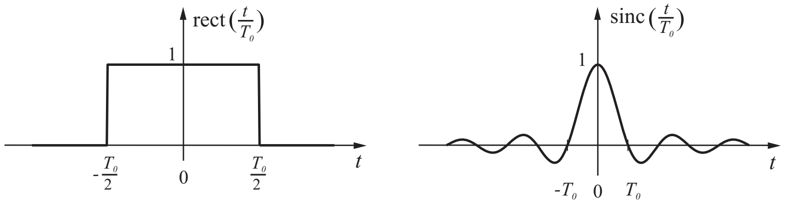


Bild 2.2: Die Rechteck- und die Sinc-Funktion

Betrachtet man einen Rechteckpuls der Breite $\Delta t$, der Höhe $\frac{1}{\Delta t}$ und lässt man $\Delta t$ wie in Bild 2.3 gegen null gehen, so entsteht ein Reckteckpuls $\delta(t)$, der unendlich hoch und unendlich dünn ist, der aber eine endliche Fläche von 1 hat: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$.

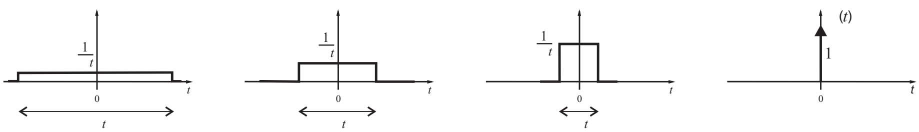


Bild 2.3: Vom Rechteck- zum Dirac-Puls

Aus mathematischer Sicht stellt dieser Puls eigentlich keine Funktion dar, sondern eine Distribution oder eine verallgemeinerte Funktion [FB08], die über das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t)\, dt = x(0) \tag{2.5}$$

definiert ist. Dabei ist $x(t)$ ein beliebiges Signal, dessen Wert zum Zeitpunkt null $x(0)$ beträgt. Den so definierten Impuls $\delta(t)$ nennt man Dirac-Impuls, Dirac-Puls, Dirac-Stoss, Dirac-Funktion oder Impulsfunktion und stellt ihn, wie Bild 2.3 rechts zeigt, mit einem Pfeil dar. Die neben dem Pfeil stehende Zahl ist die Fläche des Dirac-Impulses und wird *Gewicht* genannt.

Multipliziert man ein Signal $x(t)$ mit einem $t_0$-verschobenen Dirac-Puls $\delta(t-t_0)$ und integriert anschliessend, dann erhält man analog zu Gl.(2.5):

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)\;. \tag{2.6}$$

Man sagt, dass der Dirac-Impuls $\delta(t-t_0)$ das Signal $x(t)$ an der Stelle $t=t_0$ abtastet und spricht von der *Abtasteigenschaft* des Dirac-Impulses (Bild 2.4).

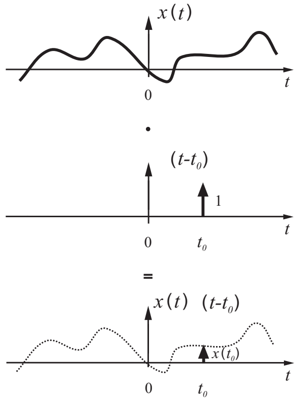


Bild 2.4: Die Abtasteigenschaft des Dirac-Impulses

Mithilfe des Dirac-Impulses lässt sich die so genannte Abtastfunktion oder Dirac-Impulsfolge konstruieren. Man addiert zum Dirac-Impuls seine um ganze Vielfache von $T$ verschobenen Duplikate gemäss der Formel

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \tag{2.7}$$

und erhält so das in Bild 2.5 rechts dargestellte periodische Signal mit dem Parameter $T$ als Abtastintervall oder Periode. Man spricht deshalb auch vom periodischen Dirac-Stoss.

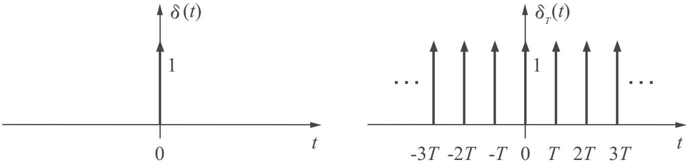


Bild 2.5: Der Dirac-Impuls und die Abtastfunktion

### 2.1.2 Kontinuierliche und diskrete Signale

Unter einem *kontinuierlichen* oder *analogen Signal* $x(t)$ versteht man eine Funktion der kontinuierlichen Zeitvariablen $t$. Sämtliche Elementarsignale, inklusive der Distributionen, zählen zu dieser Kategorie. Das *zeitdiskrete* oder kurz das *diskrete* Signal unterscheidet sich vom analogen Signal darin, dass es nur zu diskreten Zeitpunkten definiert ist. Zur Illustration zeigt Bild 2.6 links ein analoges und Bild 2.6 rechts das dazugehörige zeitdiskrete Signal.

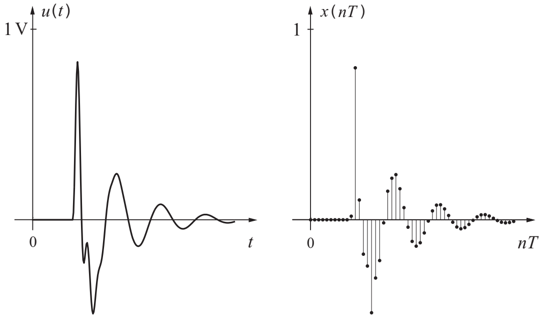


Bild 2.6: Beispiel für ein analoges und ein diskretes Signal

In der Praxis wird ein zeitkontinuierliches Signal durch eine physikalische Grösse repräsentiert. Beispiele dafür sind der Schalldruck $p(t)$ in einem Mikrofon, die Drehzahl $r(t)$ einer rotierenden Maschine, die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Körpers, usw. Eine physikalische Grösse wird in der Signalverarbeitung durch einen Sensor erfasst, elektrisch umgewandelt, wenn nötig amplitudenbeschränkt, eventuell verstärkt und gefiltert, so dass sie in Form einer zeitabhängigen Spannung $u(t)$ vorliegt. Diese Spannung wird an einen Analog-Digital-Wandler gelegt, der sie in ein zeitdiskretes Signal $x(nT)$ umwandelt und dem Computer zur digitalen Verarbeitung zuführt.

Ab Kap. 3 werden wir uns ausschließlich mit dieser Art von Signalen beschäftigen.

### 2.1.3 Deterministische und stochastische Signale

Deterministische Signale sind Funktionen, deren Funktionswerte durch einen mathematischen Ausdruck oder eine bekannte Regel bestimmt (determiniert) sind. Eines der bekanntesten deterministischen Signale ist die schon erwähnte Cosinusfunktion $x(t) = \hat{X}\cos(2\pi f_0 t)$. Ein Beispiel dafür ist die Cosinusschwingung mit $\hat{X} = 1.41$ und $f_0 = 5\,\mathrm{Hz}$ in Bild 2.7 links. Auch das Signal in Bild 2.6 links ist deterministisch, da es sich um die Schrittantwort eines Bandpassfilters handelt.

Ein stochastisches Signal ist ein Zufallssignal und kann nur mit Mitteln der Statistik beschrieben werden. Seine Amplitude, d. h. sein Funktionswert zu einem bestimmten Zeitpunkt, hängt von einem Zufallsprozess ab und kann nicht durch eine Formel oder eine Regel bestimmt werden. Vielfach jedoch sind sein Mittelwert, seine Varianz und seine Autokorrelationsfunktion bestimmbar (drei Grössen, die wir später erklären werden). Ein Muster eines stochastischen Signals ist in Bild 2.7 rechts gezeigt. Es handelt sich um Rauschen, das den gleichen Mittelwert und die gleiche Varianz hat wie das Cosinussignal daneben, nämlich 0 und 1.

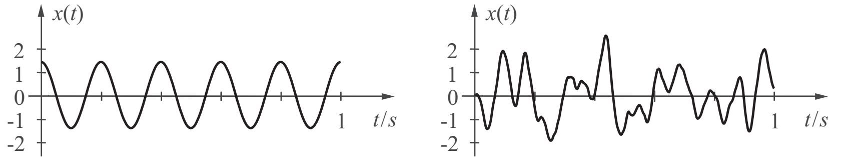


Bild 2.7: Beispiel für ein deterministisches und ein stochastisches Signal

Allein stochastische Signale, wie z. B. Sprach- oder Videosignale, sind Träger von Information. Es gibt aber auch stochastische Signale, die keine Information enthalten, oder genauer gesagt, keine erwünschte Information. Beispiele dafür sind Geräusche, unerwünschte Musik, Störimpulse, usw.

Streng genommen sind alle realen Signale stochastisch, da sie immer mit unbekannten Fehlern behaftet sind. Man ersetzt sie in der Theorie jedoch vielfach durch idealisierte Signale, oder wie man auch sagt, durch Modelle, da diese eine einfachere mathematische Handhabung erlauben. Beispiele dafür sind die Beschreibung der Netzspannung durch eine Sinusfunktion, die Modellierung eines Impulses endlicher Flankensteilheit durch einen Rechteckimpuls, usw.

### 2.1.4 Periodische, kausale, gerade und ungerade Signale

Ein Signal $x_p(t)$ heisst *periodisch* mit der Periode $T_0$, wenn es folgende Bedingung erfüllt:

$$x_p(t) = x_p(t + T_0)\,. \tag{2.8}$$

Die fundamentale Periode (engl: fundamental period) ist der kleinste positive Wert $T_0$, welcher die Bedingung (2.8) erfüllt. Im Allgemeinen ist mit dem Begriff Periode dieser Wert gemeint. Bei periodischen Signalen genügt die Kenntnis der Funktion während einer einzigen Periode, um das ganze Signal zu kennen. Beispiele für periodische Signale sind die Abtastfunktion in Bild 2.5, das Cosinussignal in Bild 2.7 und die Sägezahnschwingung in Bild 2.8.

Eine weitere wichtige Klasse von Signalen sind die kausalen Signale. Ein Signal $x_{cs}(t)$ nennt man *kausal* (engl: causal), wenn es auf der negativen Zeitachse null ist:

$$x_{cs}(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < 0\,. \tag{2.9}$$

Das bekannteste kausale Signal ist die Sprung- oder Schrittfunktion $\varepsilon(t)$ (engl: unit step), die wie folgt definiert ist (Bild 2.8 rechts):

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & : \quad t < 0 \\ 1 & : \quad t > 0 \end{cases} \,. \tag{2.10}$$

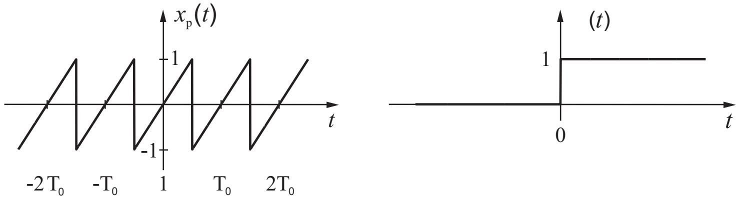


Bild 2.8: Beispiel für ein periodisches und ein kausales Signal

Ein gerades Signal (engl: even signal) $x_g(t)$, resp. ein ungerades Signal (engl: odd signal) $x_u(t)$ ist wie folgt definiert:

$$x_g(t) = x_g(-t)\,, \qquad x_u(t) = -x_u(-t)\,. \tag{2.11}$$

Ein gerades Signal ist spiegelsymmetrisch zur $y$-Achse, wie beipielsweise die Cosinusfunktion oder die Rechteckfunktion, und ein ungerades Signal ist punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs, wie z.B. die Sinusfunktion oder die Sägezahnfunktion in Bild 2.8.

Mithilfe der untenstehenden Gleichung lässt sich jedes beliebige Signal $x(t)$ in ein gerades und in ein ungerades Teilsignal zerlegen:

$$x(t) = \underbrace{\frac{x(t) + x(-t)}{2}}_{x_g(t)} + \underbrace{\frac{x(t) - x(-t)}{2}}_{x_u(t)}\,. \tag{2.12}$$