

# 4 Wärmeübertragung

F. R. STUPPERICH

## Formelzeichen

Zeichen	Definition	Bezeichnung	Einheit
<i>Lateinische Zeichen</i>			
$A$		Fläche; Oberfläche	$m^2$
$A_j^*$	$A_j/A$	Flächenanteil der Komponente $j$	1
$A_q$		Querschnittfläche (Querschnitt)	$m^2$
$a$	$\lambda/(\rho c_p)$	Temperaturleitfähigkeit	$m^2/s$
$b$		Breite	m
$\dot{C}$	$\dot{C} = \dot{m}c_p$	Kapazitätsstrom	W/K
$c_p$	$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p$	isobare spez. (Wärme-)Kapazität	J/(kg K)
$D$		Diffusionskoeffizient	$m^2/s$
$D$		Durchmesser (z. B. Wendel)	m
$d$		Durchmesser	m
$d_h$	$4A_q/U$	hydraulischer Durchmesser	m
$F$	$\partial(mw)/\partial t$	Kraft	N
$f$		Frequenz (Drehfrequenz; früher „Drehzahl“)	$s^{-1}$
$G$		Gewichtskraft	N
$g$		Fallbeschleunigung	$m/s^2$
$H$	$U + pV$	Enthalpie	J
$\dot{H}$	$\partial H/\partial t$	Enthalpiestrom	W
$h$	$H/m$	spezifische Enthalpie	J/kg
$\Delta h_v$	$h'' - h'$	spezifische Verdampfungsenthalpie	J/kg
$k$		Wärmedurchgangskoeffizient	W/( $m^2$ K)
$k$		Rauigkeitshöhe	m
$kA$	$\dot{Q}/\Delta\vartheta_m = 1/R_{ges}$	Wärmedurchgangsleitwert	W/K
$l$		Länge (eines Körpers)	m
$\ell$		charakteristische Länge (eines Körpers)	m
$\ell$	$(v^2/g)^{1/3}$	charakteristische Länge (bei Kondensation)	m
$m$		Masse	kg
$m_L$		Masse der (trockenen) Luft	kg
$m_D$		Masse des Wasserdampfs	kg

$m_j^*$		Massenanteil der Komponente j	1
$\dot{m}$	$\partial m / \partial t$	Massenstrom	kg/s
$N$		Anzahl	1
$p$		Druck (Absolutdruck; Gesamtdruck)	Pa
$p_D$		Partialdruck des Wasserdampfs	Pa
$p'_D$	$p'_w$	Sättigungsdruck des Wasserdampfs	Pa
$p_n$		Normdruck	= 10 1325 Pa
$Q_{12}$	$\int_{t_1}^{t_2} \dot{Q} dt$	Wärme (Energie, die in der Zeitspanne $t_2 - t_1$ durch Wärmeübertragung von System ① in System ② transportiert worden ist.)	J
$\dot{Q}$		Wärmestrom (Wärmeleistung)	W
$\underline{\dot{Q}}$		Wärmestromdichte (flächenbezogener Wärmestrom)	W/m <sup>2</sup>
$R$	$\tilde{R} / \tilde{M}$	individuelle (spezifische) Gaskonstante	J/(kg K)
$R$		Wärmewiderstand	K/W
$R_\alpha$	$1 / \alpha A$	Wärmeübergangswiderstand	K/W
$R_\lambda$	$s / (\lambda A_m)$	Wärmeleitwiderstand	K/W
$R_\Lambda$	$\Sigma(s / (\lambda A_m))_j$	Wärmedurchlasswiderstand	K/W
$R_{\text{ges}}$	$R_{\alpha 1} + R_\Lambda + R_{\alpha 2}$	Wärmedurchgangswiderstand	K/W
$r$		Radius	m
$r$	$RA$	reduzierter Wärmewiderstand	m <sup>2</sup> K/W
$r_\alpha$	$1 / \alpha$	reduzierter Wärmeübergangswiderstand	m <sup>2</sup> K/W
$r$		Reflexionsgrad	1
$s$		Weg, Körperausdehnung, Strecke, Abstand (Länge)	m
$T$		(thermodynamische) Temperatur	K
$T_n$		Eistemperatur des Wassers, Normtemperatur	= 273,15 K
$t$		Zeit	s
$U$		(benetzter) Umfang eines Querschnitts	m
$V$		Volumen	m <sup>3</sup>
$v$	$V / m$	spezifisches Volumen (massebezogenes Volumen)	m <sup>3</sup> /kg
$W$	$\int F ds$	Arbeit	J
$\dot{W}$	$\partial W / \partial t$	(Arbeits-)Leistung	W
$\dot{W}_t$	$\partial W_t / \partial t$	Technische Leistung	W
$w$		Geschwindigkeit	m/s
$\bar{w}$	$\frac{\dot{m}}{\bar{\rho} A_q}$	mittlere Geschwindigkeit (über den Querschnitt gemittelt) (der Querstrich wird im Allgemeinen weggelassen, wenn keine Verwechslungsgefahr besteht)	m/s
$w_m$	$\frac{1}{l} \int_{x=0}^l \bar{w} dx$	mittlere Geschwindigkeit (über die Kanallänge gemittelt)	m/s
$X$	$x / l$	dimensionslose Längenkoordinate (in Strömungsrichtung)	1

$x$		Längenkoordinate (in Strömungsrichtung)	m
$x$	$m_D/m_L$	Wasserbeladung	1
$y$		Längenkoordinate (quer zur Strömungsrichtung)	m
$z$		Höhe (Längenkoordinate in vertikaler Richtung)	m

## Griechische Zeichen

$\alpha$	$\frac{\dot{Q}}{A  \vartheta_w - \vartheta_F }$	Wärmeübergangskoeffizient	$m^2$
$\delta$		Dicke (z. B. Grenzschichtdicke)	m
$\varepsilon$		Emissionsgrad	1
$\varepsilon$		Leistungszahl	1
$\eta$	$\frac{\tau}{\partial w / \partial y}$	dynamische Viskosität	$\frac{kg}{m \cdot s}$
$\eta$		Wirkungsgrad	1
$\Theta$		Temperaturverhältnis	1
$\vartheta$	$T - T_n$	Celsiustemperatur	$^{\circ}C (K)$
$\vartheta_{FE}$		Celsiustemperatur am Eintritt des Fluids (F := H für Heizmittel; F := K für Kühlmittel)	$^{\circ}C (K)$
$\vartheta_{FA}$		Celsiustemperatur am Austritt des Fluids (F := H für Heizmittel; F := K für Kühlmittel)	$^{\circ}C (K)$
$\Delta\vartheta_F$	$\vartheta_{FA} - \vartheta_{FE}$	Temperaturänderung eines Stoffes in einem Wärmeübertrager	K
$\Delta\vartheta_m$	$\vartheta_{Hm} - \vartheta_{Km}$	mittlerer Temperaturunterschied in einem Wärmeübertrager	K
$\Delta\vartheta_{max}$	$\vartheta_{HE} - \vartheta_{KE}$	maximaler Temperaturunterschied in einem Wärmeübertrager	K
$\kappa$		Wärmedurchgangswert $\kappa$ (für Zylinderschalen)	$W/(m \cdot K)$
$\lambda$	$\frac{\dot{Q}}{A \Delta\vartheta}$	Wärmeleitfähigkeit	$\frac{W}{m \cdot K}$
$\mu$		Wasserdampfdiffusionswiderstandszahl	1
$\nu$	$\eta/\varrho$	kinematische Viskosität	$m^2/s$
$\pi$	$U/d$	Pi (Verhältnis von Umfang zu Durchmesser eines Kreises)	1
$\varrho$	$m/V = 1/\nu$	Dichte	$kg/m^3$
$\varrho_j$	$m_j/V$	Partialdichte	$kg/m^3$
$\varrho_w$	$m_D/V$	Partialdichte des Wasserdampfs (absolute Feuchte)	$kg/m^3$
$\sigma$		Oberflächenspannung	N/m
$\sigma$		Strahlungskoeffizient des Schwarzen Körpers	$= 5,67 \cdot 10^{-8} W/(m^2 \cdot K^4)$
$\Phi$	$\frac{ \Delta\vartheta_F }{\Delta\vartheta_{max}}$	Effektivität (Betriebscharakteristik) eines Wärmeübertragers	1
$\varphi$	$\frac{p_D}{p'_D(\vartheta_L)}$	relative Feuchte	1
$\Psi$	$V_{hohl}/V_{ges}$	Hohlraumanteil (Porosität)	1
$\psi$	$2 \frac{d}{\varrho} \frac{dp}{w^2 dx}$	Reibungszahl (Rohrreibungszahl)	1

## Kennzahlen

$Bi$	$\frac{\alpha s}{\lambda_s}$	<i>Biotzahl</i>	$\frac{\text{Wärmeübergang}}{\text{Wärmeleitung im Festkörper}}$
$Bi^*$	$\sqrt{Bi} \frac{l}{s}$	modifizierte <i>Biotzahl</i>	für den Wärmestrom in Rippen
$Co$	$\frac{\lambda (\vartheta'_l - \vartheta_w)}{\eta \Delta h_V} \cdot \frac{l}{\ell}$	Kondensationszahl	$\frac{\text{Wärmeleitung}}{\text{Kondensationsenthalpie}}$
$Gr$	$Ga \frac{ \rho }{\rho}$	<i>Grashofzahl</i>	$\frac{\text{Auftriebskraft}}{\text{Trägheitskraft}}$
$Ko$		Korrekturzahl	$\frac{\text{richtiger Wert}}{\text{Näherungswert}}$
$Le$	$\frac{Sc}{Pr}$	<i>Lewiszahl</i>	$\frac{\text{Schmidtzahl}}{\text{Prandtlzahl}}$
$Nu$	$\frac{\alpha l}{\lambda_F}$	<i>Nußeltzahl</i>	$\frac{\text{Wärmeübergang}}{\text{Wärmeleitung im Fluid}}$
$Nt$ ( <i>NTU</i> )	$\frac{kA}{\dot{C}_F} = \frac{ \Delta \vartheta_F }{\Delta \vartheta_m}$	Zahl der Übertragungseinheiten ( <u>N</u> umber of <u>T</u> ransfer <u>U</u> nits)	$\frac{\text{Wärmestrom}}{\text{Enthalpiestromänderung}}$
$Pe$	$Re Pr$	<i>Pecletzahl</i>	
$Ph$	$\frac{c'_p (\vartheta' - \vartheta_w)}{\Delta h_V}$	Phasenumwandlungszahl	$\frac{\text{Enthalpietransport in der Kondensatschicht}}{\text{Verdampfungsenthalpie}}$
$Pr$	$\frac{\nu}{a} = \frac{\eta c_p}{\lambda_F}$	<i>Prandtlzahl</i>	$\frac{\text{kinematische Viskosität}}{\text{Temperaturleitfähigkeit des Fluids}}$
$Ra$	$Gr Pr$	<i>Rayleighzahl</i>	
$Re$	$\frac{w l}{\nu_F}$	<i>Reynoldszahl</i>	$\frac{\text{Impulsflussdichte}}{\text{Wandschubspannung}} \approx \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}}$
$Sr$	$\frac{l}{w t}$	<i>Strouhalzahl</i>	
$St$	$\frac{Nu}{Re Pr}$	<i>Stantonzahl</i>	$\frac{\text{Wärmestromdichte}}{\text{Enthalpiestromdichte}}$
$Tr$		Transientenzahl	bei der instationären Wärmeleitung
$Ze_F$	$\frac{1 - \Phi_F}{1 - C_F^* \Phi_F}$	Zellenkennzahl	(F := H für Heizmittel; F := K für Kühlmittel)

*Indices*

A	Austritt	q	quer
A	Oberfläche, außen	R	Rahmen
a	außen	R	Rippe
amb	Umgebungszustand	R	Strahlung (Radiation)
B	Bulk-(Temperatur) = kalorische Mitteltemperatur in einem Strömungsquerschnitt	Reg	Regenerator
		S	Festkörper (Solid)
D	Dampf	s	fest (solid)
d	Diffusion	t	total
d	mit dem Durchmesser gebildet	t	technisch
E	Eintritt	t	zur Zeit $t$
e	engster Querschnitt	th	thermisch
eff	effektiv	turb	turbulent
F	Fluid	u	Umgebung
G	Gefach	V	Verdampfung
G	Grenzschicht	v	Verlust
ges	gesamt	v	konstantes spezifisches Volumen (Isochore)
H	Heizmittel; Heißeite	W	Wasser
h	hydraulisch	w	Wand(-oberfläche)
i	innen	x	in Strömungsrichtung
$j$	Laufindex	y	quer zur Strömungsrichtung
K	Kühlmittel; Kaltseite	z	in vertikaler Richtung
K	Kern (Zentrum eines Körpers)	$\alpha$	Wärmeübergang
k	konvektiv	$\lambda$	Wärmeleitung
kr	kritisch	$\lambda$	bezogen auf die Wellenlänge
L	Luft	$\Lambda$	Wärmedurchlass durch eine mehrschichtige Wand
$l$	flüssig (liquid)	$\Rightarrow$	Gleichstrom
$l$	längs	$\Leftrightarrow$	Gegenstrom
$\ell$	mit der charakteristischen Länge gebildet	+	Kreuzstrom (eine Rohrreihe)
lam	laminar	#	reiner Kreuzstrom
m	Mittelwert (über der Länge)	$\perp$	senkrecht (-e Wand)
max	Maximalwert	=	waagrecht (-e Wand)
min	Minimalwert	O	Rohr
p	bei konstantem Druck (Isobare)		

*Hochzeiger*

'	siedende Flüssigkeit	•	Bezug auf die Zeit
''	Sattdampf	~	Bezug auf die Stoffmenge
*	Größenverhältnis	-	Mittelwert (im Querschnitt)
$^{\circ}$	ideales Gas ( $p \rightarrow 0$ )	^	Spitzenwert (im Querschnitt)

## Einleitung

*Wärmeübertragung* ist eine Transportform von Energie von einem Körper (oder Körperteil) höherer Temperatur auf einen Körper (oder Körperteil) niedrigerer Temperatur. Wärmeübertragung findet also immer in Richtung eines Temperaturgefälles statt. Und nur dann, wenn Energie aufgrund eines Temperaturgefälles übertragen wird, nennt man diese Transportform *Wärmeübertragung*.

Man unterscheidet drei Arten der Wärmeübertragung:

1. **Wärmeleitung.** Sie kann in festen und in ruhenden fluiden Stoffen auftreten. Die Stoffteilchen behalten dabei (im Mittel) ihren festen Ort. Im Kristallgitter eines Festkörpers z. B. schwingen die Atome um ihre Gleichgewichtslage.
2. **Konvektion.** Konvektive Wärmeübertragung ist eine Überlagerung von Wärmeleitung im Fluid und Enthalpietransport der bewegten Teilchen. So nimmt z. B. beim Heizen eines Raumes die Luft an der Oberfläche des Heizkörpers Energie durch Konvektion auf und gibt sie an einer kälteren Oberfläche im Raum wieder ab. Wärmeleitung und Konvektion sind an Materie gebunden.
3. **Strahlung.** Wärmeübertragung durch Strahlung ist nicht an Materie gebunden. Zur Beschreibung der Strahlung bedient man sich der Theorie der elektromagnetischen Wellen und der Quantentheorie der Photonen. Bei der Abstrahlung wird innere Energie des Körpers in Energie der elektromagnetischen Wellen umgewandelt. Wenn diese Wellen auf einen anderen Körper auftreffen, so werden sie an dessen Oberfläche teils reflektiert, teils von dem Körper absorbiert und teilweise durch den Körper durchgelassen.

In vielen technischen Anwendungsfällen treten bei der Wärmeübertragung zwei oder alle drei Transportarten gleichzeitig auf. Wenn von einem strömenden Fluid Energie durch Wärmeübertragung auf die Oberfläche eines Festkörpers übertragen wird (oder umgekehrt), so nennt man diesen Vorgang *Wärmeübergang*. Wenn Energie von einem Fluid durch eine Trennwand hindurch auf ein anderes Fluid übertragen wird, so nennt man diesen Vorgang *Wärmedurchgang*.

Bleiben die Temperaturen an allen Stellen des Systems zeitlich konstant, so liegt *stationäre Wärmeübertragung* vor. Die Temperatur ist dann nur vom Ort, d. h. von den Koordinaten  $x$ ,  $y$ , und  $z$  abhängig:

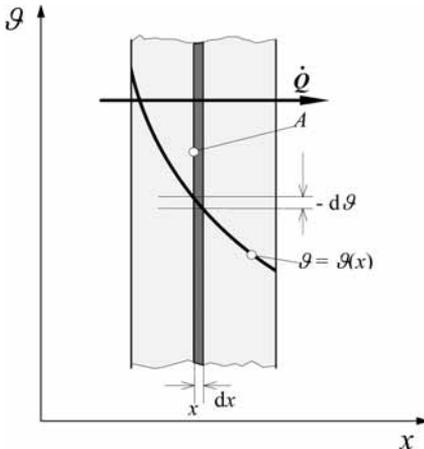
Wenn die Temperaturen zeitlich veränderlich sind, liegt *instationäre Wärmeleitung* vor. Dies ist bei allen Aufheiz- und Abkühlvorgängen der Fall. Dann ist die Temperatur nicht nur vom Ort im System sondern auch noch von der Zeit  $t$  abhängig:

Um die Vorgänge bei der Wärmeübertragung quantitativ beschreiben zu können, müssen die drei Arten der Wärmeübertragung (zumindest in ihren Grundzügen) getrennt behandelt werden, weil sie verschiedenen Gesetzmäßigkeiten unterliegen.

Zur Wärmeübertragung allgemein ist mit [1] bis [8] eine Auswahl deutschsprachiger Literatur angegeben.

## 4.1 Wärmeleitung

Das Problem der Wärmeleitung wird u. a. in [9]...[12] ausführlich dargestellt. Hier soll nur die eindimensionale Wärmeleitung behandelt werden, bei der sich die Temperatur nur in einer Richtung ändert, die mit  $x$  bezeichnet werden soll. Demnach fließt ein entsprechender Wärmestrom auch nur in  $x$ -Richtung. Bild 4-1 zeigt als Beispiel den Temperaturverlauf in einer unendlich ausgedehnten, ebenen Platte (im Folgenden nur als „Platte“ bezeichnet).



**Bild 4-1:** Temperaturverlauf bei eindimensionaler Wärmeleitung in einer unendlich ausgedehnten, ebenen Platte

Für den Wärmestrom  $\dot{Q}$ , der an der Stelle  $x$  in der Platte von links nach rechts fließt, wird der phänomenologische Ansatz nach *Fourier* gemacht

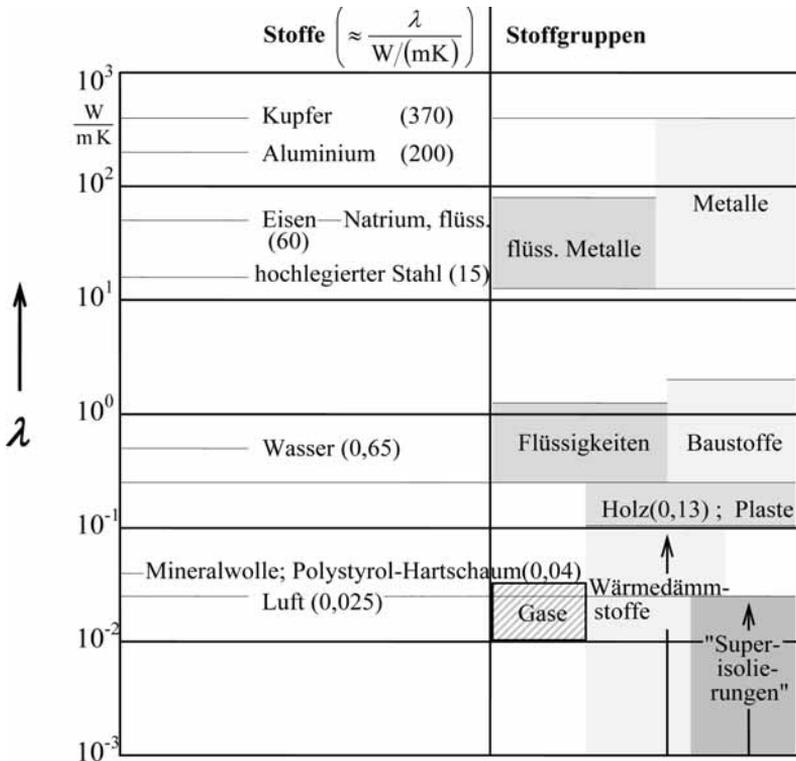
$$\dot{Q} = -\lambda A \frac{\partial \vartheta}{\partial x}.$$

Es bedeuten:

$A$	Wandfläche senkrecht zum Wärmestrom	$\text{m}^2$
$-\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$	Temperaturgefälle an der Stelle $x$	$\text{K/m}$
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit	$\text{W}/(\text{m K})$

### 4.1.1 Wärmeleitfähigkeit

Die Wärmeleitfähigkeit ist leider keine Konstante, sondern bei den meisten Körpern eine Funktion der Temperatur und in sehr geringem Maße auch des Drucks. Wenn die Temperaturunterschiede nicht zu groß sind, kann man jedoch für viele technische Rechnungen die Wärmeleitfähigkeit als konstant ansetzen. Das nachfolgende Bild 4-2 gibt eine Übersicht über die Bereiche der Wärmeleitfähigkeit verschiedener Stoffe bzw. Stoffgruppen.



**Bild 4-2:** Übersicht über die Wärmeleitfähigkeit verschiedener Stoffe und Stoffgruppen

Die Stoffe mit der höchsten Wärmeleitfähigkeit sind die Metalle. Die Wärmeleitfähigkeit von nichtmetallischen Stoffen liegt im Bereich  $\lambda \approx 0,2 \dots 4 \text{ W}/(\text{m K})$ .

Zu der Gruppe der Wärmedämmmaterialien gehören alle Feststoffe, deren Wärmeleitfähigkeit unter  $0,1 \text{ W}/(\text{m K})$  liegt. Demnach gehören z. B. die normalen Bauhölzer (Fichte, Kiefer, Tanne) mit  $\lambda \approx 0,13 \text{ W}/(\text{m K})$  nicht zu den Dämmstoffen.

Die Wirkung der Wärmedämmmaterialien beruht darauf, dass der eigentliche feste Grundstoff von Poren mehr oder weniger stark durchsetzt ist. Diese Poren sind fast immer mit Gas (meistens Luft) gefüllt. In einem gasgefüllten Raum wird bei unterschiedlichen Wandtemperaturen immer Wärmeübertragung durch Strahlung von Wand zu Wand, durch Wärmeleitung in der Gasschicht und bei genügend großem Wandabstand auch zusätzlich durch Gasbewegung (Konvektion) stattfinden.

Wird aber der Zwischenraum zwischen den Wänden durch Festmaterial teilweise verstellt, so wird der Strahlungsfluss unterbrochen und bei genügend kleinen Poren die konvektive Gasbewegung gänzlich verhindert. Für eine optimale Dämmwirkung muss der Feststoffanteil so gering sein, dass die Wärmeleitung durch den Feststoff möglichst niedrig bleibt. Andererseits müssen die Feststoffpartikel dafür sorgen, dass eine ausreichend große Unterbrechung der Strahlung und möglichst eine Verhinderung der Konvektion eintritt.

### 4.1.2 Stationäre Wärmeleitung

Ein Prozess ist stationär, wenn die Vorgänge und die Zustandsgrößen unabhängig von der Zeit sind. Dann ist der Wärmestrom durch eine Wand am Eintritt genauso groß wie am Austritt. Die stationäre Wärmeleitung durch die drei Grundkörper (Platte, Zylinderschale und Kugelschale) lässt sich mit einer gemeinsamen Gleichung beschreiben

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{s} A_m (\vartheta_0 - \vartheta_1) . \quad (4-1)$$

Es bedeuten:

$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit der Wand	W/(m K)
$s$	Wanddicke	m
$A_m$	mittlere Wandfläche senkrecht zum Wärmestrom	m <sup>2</sup>
$\vartheta_0$	Celsiustemperatur auf Oberfläche der Heizseite (Eintritt)	°C
$\vartheta_1$	Celsiustemperatur auf Oberfläche der Kühlseite (Austritt)	°C

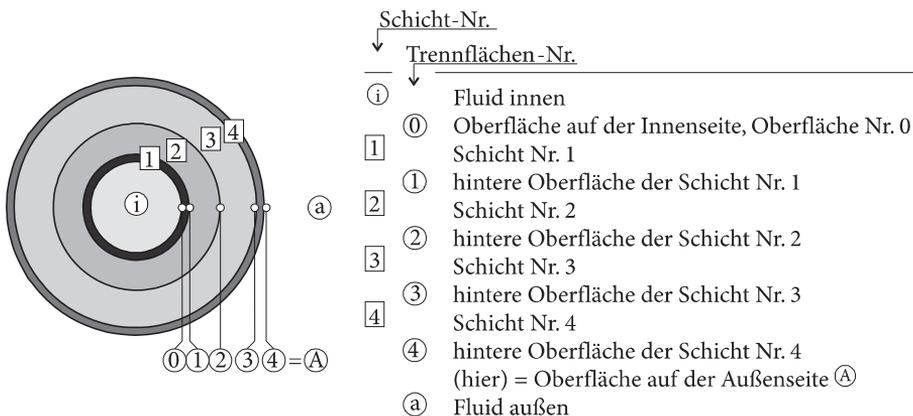
In die gemeinsame Gleichung (4-1) ist die dem jeweiligen Körper zugehörige mittlere Übertragungsfläche  $A_m$  einzusetzen:

Grundkörper:	Platte	Zylinderschale	Kugelschale
mittlere Fläche $A_m =$	$bz$ a)	$\pi d_m z$ b)	$\pi d_0 d_1$ c)

mittlerer Durchmesser der Zylinderschale:	$d_m = \frac{d_1 - d_0}{\ln \frac{d_1}{d_0}}$	(4-3)
---	---	-------

### 4.1.3 Wärmedurchgang

Die Wärmeübertragung von einem Fluid durch eine Trennwand auf ein anderes bezeichnet man als *Wärmedurchgang*. Als Beispiel dazu dient ein mehrschichtiges Rohr in Bild 4-3. Die Nummerierung der Schichten und deren Trennflächen ist von innen nach außen vorgenommen. So ist z. B. die Fläche  $\uparrow$  die Trennfläche zwischen der Schicht  $\boxed{2}$  und der Schicht  $\boxed{3}$ .



**Bild 4-3:** Mehrschichtige Zylinderwand

Ein und derselbe (stationäre) Wärmestrom  $\dot{Q}$  fließt vom Fluid innen (i) durch die Schichten 1 bis 4 und geht dann auf das Fluid außen (a) über. Für den Wärmeübergang von einem Fluid auf einen Festkörper (oder umgekehrt), z. B. vom Fluid innen auf die Oberfläche (i), wird der *Newtonsche Ansatz* gemacht

$$\dot{Q}_{i,0} = \alpha_i A_0 (\vartheta_i - \vartheta_0). \quad (4-4)$$

Darin ist  $\alpha_i$  der Wärmeübergangskoeffizient, der von einer Vielzahl von Einflussgrößen (u. a. Geschwindigkeit des Fluids, Stoffeigenschaften des Fluids und der Geometrie) abhängt. Die Berechnung dieses Koeffizienten ist Gegenstand der folgenden Kapitel 4.2. ... 4.4. In manchen Fällen, wie z. B. beim Wärmeschutz im Hochbau (DIN 4108) sind solche Koeffizienten der Einfachheit halber genormt (Tabelle 4-10).

Für den Wärmestrom, der vom einen Fluid durch die Wand zum anderen fließt, macht man den Ansatz

$$\dot{Q}_{i,0} = kA(\vartheta_i - \vartheta_a) = \frac{\vartheta_i - \vartheta_a}{R_{\text{ges}}}. \quad (4-5)$$

Es bedeuten:

- $A$  Wandfläche senkrecht zum Wärmestrom  $\text{m}^2$   
 $k$  Wärmedurchgangskoeffizient  $\text{W}/(\text{m}^2 \text{K})$   
 $R_{\text{ges}} = 1/(kA)$  Wärmedurchgangswiderstand  $\text{K}/\text{W}$

Bei der Hintereinanderschaltung von Wärmewiderständen ist der Wärmedurchgangswiderstand die Summe aller Widerstände. Die verschiedenen Widerstände und ihre Definitionen sind in der folgenden Übersicht dargestellt:

$$\dot{Q} \left( \underbrace{\frac{1}{\alpha_i A_0}}_{\text{Wärmeübergangswiderstand innen}} + \frac{s_1}{\lambda_1 A_{m1}} + \frac{s_2}{\lambda_2 A_{m2}} + \dots + \underbrace{\frac{s_j}{\lambda_j A_{mj}}}_{\text{Wärmeleitwiderstand Schicht } j} + \dots + \frac{s_N}{\lambda_N A_{mN}} + \underbrace{\frac{1}{\alpha_a A_A}}_{\text{Wärmeübergangswiderstand außen}} \right) = (\vartheta_i - \vartheta_a), \quad (4-6)$$

Wärmeleitwiderstand der Schicht Nr.  $j$

$$R_{\lambda j} = \frac{s_j}{\lambda_j A_{mj}} \quad (4-6)$$

Wärmedurchlasswiderstand der Wand

$$R_{\Lambda} = \sum_{j=1}^N \frac{s_j}{\lambda_j A_{mj}} \quad (4-7)$$

Wärmeübergangswiderstand innen bzw. außen

$$R_{\alpha i} = \frac{1}{\alpha_i A_0} \quad R_{\alpha a} = \frac{1}{\alpha_a A_A} \quad (4-8)$$

Wärmedurchgangswiderstand

$$R_{\text{ges}} = R_{\alpha i} + R_{\Lambda} + R_{\alpha a} \quad (4-9)$$

Wärme-  
durchgangs-  
leitwert

$$kA := \frac{1}{R_{\text{ges}}} \quad (4-10)$$

Es handelt sich hier um eine Reihenschaltung von Wärmewiderständen. Man erkennt hier sofort die Analogie zur Reihenschaltung elektrischer Widerstände.

$$\dot{Q} = \frac{\vartheta_i - \vartheta_a}{R_{\text{ges}}} = \frac{\vartheta_i - \vartheta_x}{R_x} \quad (4-11)$$

Bei elektrischen Strömen verhalten sich die Spannungsabfälle wie die Widerstände. Bei (stationären) Wärmeströmen verhalten sich die Temperaturunterschiede wie die Wärmewiderstände:

$$\frac{\text{Temperaturunterschied (A)}}{\text{Temperaturunterschied (B)}} = \frac{\text{Widerstand (A)}}{\text{Widerstand (B)}}$$

$R_x$  ist der Wärmewiderstand zwischen dem „inneren“ Fluid (i) und der beliebigen Trennfläche (x)

$$R_x := \frac{1}{\alpha_i A_0} + \sum_{j=1}^x \frac{s_j}{\lambda_j A_{mj}} \quad (4-12)$$

Dann verhält sich der Temperaturunterschied zwischen (i) und (x) zum Gesamttemperaturunterschied zwischen (i) und (a) wie der Widerstand zwischen (i) und (x) zum Gesamtwiderstand zwischen (i) und (a)

$$\frac{\vartheta_i - \vartheta_x}{\vartheta_i - \vartheta_a} = \frac{R_x}{R_{\text{ges}}} = \frac{\frac{1}{\alpha_i A_0} + \sum_{j=1}^x \frac{s_j}{\lambda_j A_{mj}}}{\frac{1}{kA}} \quad (4-13)$$

Dividiert man den Wärmedurchgangsleitwert durch eine der Trennflächen  $A_j$ , so erhält man den **Wärmedurchgangskoeffizienten**

$$k_j := \frac{kA}{A_j} \quad (4-14)$$

der auch kurz als *k-Wert* bezeichnet wird. Man muss allerdings immer dabei angeben, auf welche Fläche dieser Wert bezogen ist. Bei wärmedämmten Versorgungsleitungen bezieht man z. B. auf die äußere Kanaloberfläche und nicht auf die Außenfläche der Dämmschicht. In DIN 4108 (Wärmeschutz im Hochbau) wird hingegen immer auf die äußere Gebäude-Hüllfläche bezogen, weil man dort mit ebenen Flächen rechnet und auf diese Weise die erhöhten Wärmeströme in den Gebäudekanten mit einkalkuliert.

Bei **ebenen Wänden** sind alle Trennflächen  $A_{mj}$  der Schichten  $j$  gleich groß und kürzen sich bei der *k-Wert*-Berechnung heraus

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{j=1}^N \frac{s_j}{\lambda_j} + \frac{1}{\alpha_a} \quad (4-15)$$

Diese Möglichkeit ist z. B. bei Platten-Wärmeübertragern und i. Allg. mit ausreichender Näherung bei Gebäuden gegeben. Um Missverständnisse zu vermeiden, soll im Gegensatz zum Wärmewiderstand  $R_\lambda = s/(\lambda A_m)$  bzw.  $R_\alpha = 1/(\alpha A)$  der um die gemeinsame Übertragungs-

fläche  $A$  **reduzierte Wärmewiderstand** definiert werden

$$\boxed{r_\lambda := \frac{s}{\lambda}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{r_\alpha := \frac{1}{\alpha}} \quad (4-16)$$

Entsprechend (4-12) ist der reduzierte Wärmewiderstand  $r_x$  zwischen dem „inneren“ Fluid  $i$  und der beliebigen Trennfläche  $x$  bei ebenen Wänden

$$\boxed{r_x := \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{j=0}^x \frac{s_j}{\lambda_j}} \quad (4-17)$$

Dann ergibt sich für die Verhältnisse der Temperaturunterschiede entsprechend (4-15)

$$\frac{\vartheta_i - \vartheta_x}{\vartheta_i - \vartheta_a} = \frac{r_x}{r_{\text{ges}}} = \frac{\frac{1}{\alpha_i} + \sum_{j=1}^x \frac{s_j}{\lambda_j}}{\frac{1}{k}} \quad (4-18)$$

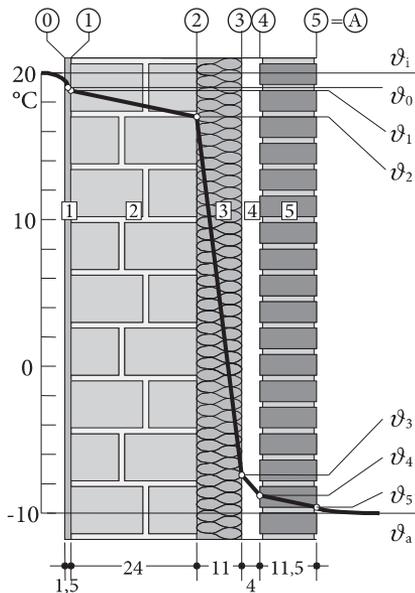
#### Beispiel 4-1:

Ein Gebäude mit einer *Celsius*temperatur von  $20^\circ\text{C}$  im Innenraum wird im Winter bei einer *Celsius*temperatur außen von  $-10^\circ\text{C}$  beheizt. Der Wandaufbau des zweischaligen Mauerwerks ist in Bild 4-4 dargestellt. Die Maße und die entsprechenden Stoffdaten sind aus der nebenstehenden Tabelle zu entnehmen. Man berechne den  $k$ -Wert und den Temperaturverlauf für den stationären Wärmedurchgang.

Die Berechnung mit Hilfe der Gleichungen (4-15) bis (4-18) wird in der Tabelle 4-1 durchgeführt.

Der  $k$ -Wert dieser Wand unterschreitet die heutigen Anforderungen [51] an den Wärmeschutz beträchtlich und kann als „Stand der Technik“ bezeichnet werden.

Der Temperaturverlauf für stationäre Verhältnisse ist in Bild 4-4 von innen nach außen dargestellt.



Nr.	Baustoff	Rohdichte	Wärmeleitf.
		$\frac{\lambda}{\text{W}/(\text{m K})}$	$\frac{\lambda}{\text{W}/(\text{m K})}$ <sup>1)</sup>
1	Kalkzementputz	1800	0,87
2	Kalksandstein	1800	0,99
3	Mineralfaser	100	0,04
4	Luftschicht		
5	Ziegelklinker	2200	1,2

<sup>1)</sup> Rechenwerte nach DIN 4108 Teil 4 Tab. 1

**Bild 4-4:** Außenwand eines Gebäudes: zweischaliges, hinterlüftetes Mauerwerk

**Tabelle 4-1:** Berechnung von  $k$ -Wert und Temperaturverlauf einer mehrschichtigen Außenwand

Nr.	Stoff	Rohdichte	Dicke	Wärmeleitfähigkeit	red. Wärmewiderstand	red. Wärmewiderstand $\rightarrow x$	rel. Wärmewiderstand	Celsius-temperatur
	Größe $\rightarrow$	$\varrho_j$	$s_j$	$\lambda_j$ <sup>1)</sup>	$r_{\lambda_j}, (r_\alpha)$	$r_x$	$\frac{r_x}{r_{\text{ges}}}$	$\vartheta_j$
	Einheit $\rightarrow$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	m	$\frac{\text{W}}{\text{m K}}$	$\frac{\text{m}^2 \text{K}}{\text{W}}$	$\frac{\text{m}^2 \text{K}}{\text{W}}$	1	$^\circ \text{C}$
i	Celsiustemperatur innen =							20,0
0	Wärmeübergang innen:			$1/\alpha_i =$	$0,13$ <sup>2)</sup> =	0,13	0,0377	18,87
1	Kalkzementputz	1800	0,015	0,87	0,017	0,147	0,0427	18,72
2	Kalksandstein	1800	0,24	0,99	0,242	0,389	0,1129	16,61
3	Mineralfasermatte	100	0,11	0,04	2,75	3,139	0,9112	-7,34
4	Luftschicht		0,04		0,17 <sup>3)</sup>	3,309	0,9605	-8,81
5	Ziegelklinker	2200	0,115	1,2	0,096	3,405	0,9884	-9,65
a	Wärmeübergang außen:			$1/\alpha_a =$	$0,04$ <sup>2)</sup>	3,445	1	-10,0
	Summe	$s_w = 0,555 \text{ m}$		$1/k =$	3,445			
<b>Wärmedurchgangskoeffizient:</b>					$k = 0,29 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$			

<sup>1)</sup> Rechenwerte nach DIN 4108 Teil 4 Tab. 1 [51]

<sup>2)</sup> Red. Wärmeübergangswiderstände nach DIN 4108 Teil 4 Tab. 2 [51]

<sup>3)</sup> Rechenwert für senkrechte, ruhende Luftschichten nach DIN 4108 Teil 4 Tab. 5 [51]

**Ergebnis:** Der Temperaturabfall bis zur inneren Oberfläche ① beträgt nur gut 1 K. In der Mineralfaserdämmung liegen 80% des gesamten Wärmewiderstands. Also findet dort auch 80% des Temperaturabfalls statt. Das Vormauerwerk ist zwar hinterlüftet, aber die Luftgeschwindigkeit ist so gering, dass die Luft wie eine ruhende Luftschicht behandelt werden kann. Die Vormauerschale hat „nur“ eine optische und eine Wetterschutzfunktion.

Bei der Berechnung des Wärmedurchgangs durch Zylinderschalen formuliert man den Wärmestrom von innen nach außen mit

$$\dot{Q}_{ia} = \kappa l (\vartheta_i - \vartheta_a). \quad (4-19)$$

Darin ist  $\kappa$  der längenbezogene Wärmedurchgangsleitwert (im Folgenden kurz  $\kappa$ -Wert genannt)

$$\kappa = \frac{kA}{l}, \quad (4-20)$$

bzw.  $1/(\kappa l)$  der Wärmedurchgangswiderstand

$$\frac{1}{\kappa l} = \frac{1}{kA} = \frac{1}{\alpha_i A_0} + \sum_{j=1}^N \frac{s_j}{\lambda_j A_{mj}} + \frac{1}{\alpha_a A_A}$$

oder

$$\frac{1}{\kappa l} = \frac{1}{kA} = \frac{1}{k \pi d l} = \frac{1}{\pi l} \left( \frac{1}{\alpha_i d_0} + \sum_{j=1}^N \frac{s_j}{\lambda_j d_{mj}} + \frac{1}{\alpha_a d_A} \right)$$

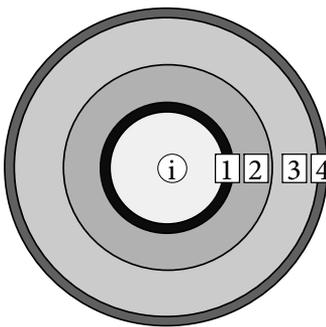
mit dem mittleren Durchmesser aus Gl. (4-2)

$$d_m = \frac{d_j - d_{j-1}}{\ln(d_j/d_{j-1})} = \frac{2s_j}{\ln(d_j/d_{j-1})}$$

Daraus erhält man für den  $\kappa$ -Wert

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{k\pi d} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha_i d_0} + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2\lambda_j} \ln \frac{d_j}{d_{j-1}} + \frac{1}{\alpha_a d_A} \right) \quad (4-21)$$

**Beispiel 4-2:** In einer 1 km langen Fernheizleitung fließt Wasser mit einer *Celsius*temperatur von 140 °C. Die *Celsius*temperatur außen im belüfteten Kanal beträgt 30 °C. Man berechne den Verlustwärmestrom und die Temperaturen an den Trennflächen der einzelnen Schichten.



Nr.	Material	Dicke mm	Wärmeleitfähigkeit W/(m K)
①	Innendurchmesser $d_0 =$	70	
1	Stahlrohr	3	60
2	Schaumglas	25	0,05
3	Polyurethan-Hartschaum	32	0,03
4	Polyethylen-Hartschale	5	0,2
ⓐ	Wärmeübergangskoeffizient außen		25 W/(m <sup>2</sup> K)

Besteht eine Wand aus verschiedenen zum Wärmestrom parallel laufenden Schichten, so kann man die Leitwerte der Schichten meistens mit ausreichender Genauigkeit anteilig addieren. Für zwei verschiedene Teile, bestehend aus Rahmen und Gefach, ergibt sich dann für den effektiven  $k$ -Wert der Wand

$$k_w = A_R^* k_R + (1 - A_R^*) k_G \quad (4-22)$$

mit dem Rahmenanteil

$$A_R^* := \frac{A_R}{A_{\text{ges}}} \quad (4-23)$$

Es bedeuten:

$A_R$	Wandfläche des Rahmens senkrecht zum Wärmestrom	m <sup>2</sup>
$A_{\text{ges}}$	gesamte Wandfläche senkrecht zum Wärmestrom	m <sup>2</sup>
$k_R$	Wärmedurchgangskoeffizient im Bereich des <u>Rahmens</u>	W/(m <sup>2</sup> K)
$k_G$	Wärmedurchgangskoeffizient im Bereich des <u>Gefaches</u>	W/(m <sup>2</sup> K)
$k_w$	effektiver Wärmedurchgangskoeffizient der <u>Wand</u>	W/(m <sup>2</sup> K)

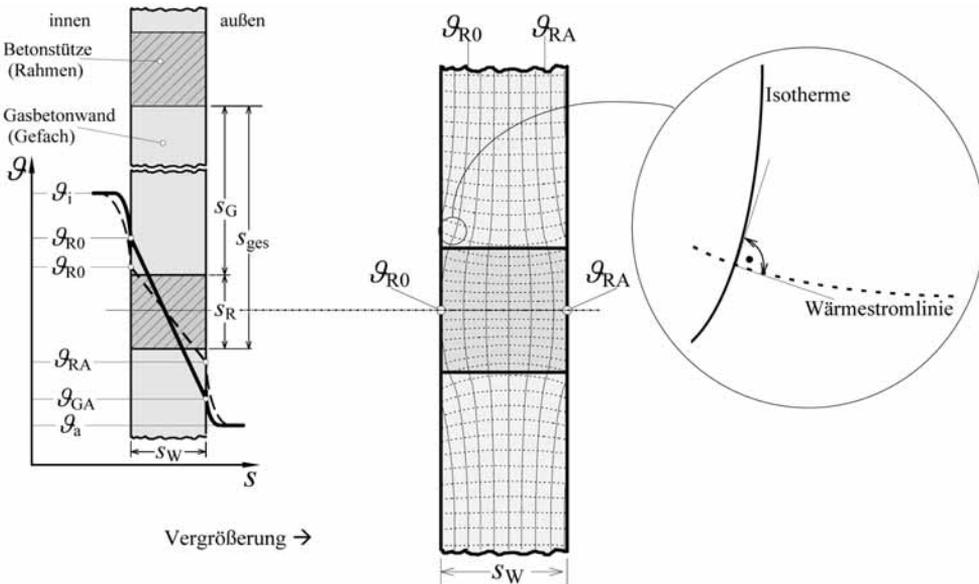
Die Parallelschaltung von Wärmewiderständen ist allerdings im Allgemeinen nicht so einfach zu formulieren wie bei elektrischen Widerständen, denn parallel liegende Wärmewiderstände sind praktisch nie durch eine adiabate Wand voneinander getrennt. Dies soll am Beispiel der Außenwand einer Fabrikhalle erläutert werden, durch die im Winter ein Wärmestrom von innen nach außen fließt.

**Tabelle 4-2:** Berechnung von  $\kappa$ -Wert und Temperaturverlauf einer mehrschichtigen Rohrwand

Nr.	Stoff	Dicke	Wärmeleitfähigkeit	Durchmesser			rel. Wärmewiderstand	Celsius-temperatur
	Größe →	$s_j$	$\lambda_j$	$d_j$	$\frac{1}{2\lambda_j} \ln \frac{d_j}{d_{j-1}}$	$\sum_{j=0}^x \frac{1}{2\lambda_j} \ln \frac{d_j}{d_{j-1}}$	$\frac{R_x}{R_{ges}}$	$\vartheta_j$
	Einheit →	m	$\frac{W}{mK}$	m	$\frac{mK}{W}$	$\frac{mK}{W}$	1	°C
i	Innendurchmesser $d_i =$				0,070			130
0	Wärmeübergang innen:			$1/(\alpha_i d_0) =$	0 =	0	0	130
1	Stahlrohr	0,003	60	0,076	$7 \cdot 10^{-4}$	$\approx 0$	0	130
2	Schaumglas	0,025	0,05	0,126	5,055	5,055	0,413	88,7
3	Polyurethan-Hartsch.	0,032	0,03	0,190	6,845	11,90	0,973	32,7
4	Polyurethan-Hart	0,005	0,2	0,200	0,128	12,03	0,984	31,6
a	Wärmeübergang außen:			$1/(\alpha_a d_A) =$	0,20	12,23	1	30,0
	Summe				$\Omega =$	12,23		
<b>Wärmedurchgangswert:</b>					$\kappa = \pi/\Omega = 0,257 \frac{W}{mK}$			

$$\dot{Q}_{ia} = \kappa l (\vartheta_i - \vartheta_a) = 0,257 \frac{W}{mK} \cdot 1 \text{ km} \cdot (130 - 30) \text{ K} = 25,7 \text{ kW} \approx 26 \text{ kW}$$

**Ergebnis:** Der Wärmedurchgangswert  $\kappa$  gibt hier an, dass bei einem Temperaturunterschied von 1 K auf einer Länge von 1 m eine Wärmeleistung von 0,257 W übertragen wird. Bei 130 K Temperaturunterschied werden auf 1 km Länge 26 kW übertragen. Die Dämmschicht aus Schaumglas muss (und kann) die höheren Temperaturen „aushalten“. Der empfindlichere Polyurethanschaum hat an der Trennfläche zum Schaumglas ② eine Maximaltemperatur von nur noch knapp 90 °C zu „ertragen“.



**Bild 4-5:** Parallelschaltung zweier Wärmewiderstände; hier: Außenwand einer Werkshalle; Rahmen: Betonstütze  $\lambda_R = 2,1 \text{ W/(mK)}$ ; Gefach: Gasbetonelemente  $\lambda_G = 0,21 \text{ W/(mK)}$   
 ———— Temperaturverlauf des „ungestörten“ Gefachs; ———— Isotherme  
 - - - - - Temperaturverlauf in Rahmenmitte; - - - - - Wärmestromlinie