

## 8 Reglerentwurf im Frequenzbereich

Wir haben Regelkreise und ihre einzelnen Komponenten bisher ausschließlich im *Zeitbereich* betrachtet, d. h. sie anhand des zeitlichen Verlaufs ihrer Ausgangsgrößen bei vorgegebenem Verlauf der Eingangsgrößen charakterisiert. Als Testsignal hatten wir dabei in den meisten Fällen ein sprungförmiges Eingangssignal gewählt, bei dem sich am Ausgang dann die sogenannte Sprungantwort des Systems ergibt. Daraus hatten wir im Falle der Regelstrecke spezifische Kennwerte (z. B. Verzugs- und Ausgleichszeit) entnommen und auf deren Basis anhand einfacher Einstellregeln beispielsweise einen geeigneten PI-Regler entworfen.

Einen wesentlich besseren Einblick in das Verhalten von Regelkreiskomponenten erhält man, wenn man diese nicht im Zeit-, sondern im *Frequenzbereich* analysiert. Diese Vorgehensweise erfordert zwar mehr mathematisches „Rüstzeug“, liefert dann jedoch Modelle bzw. Kennwerte, auf deren Basis sich eine wesentlich differenziertere Einstellung von Reglern, verbunden mit einer höheren Regelgüte, erzielen lässt. Die dazu erforderlichen Grundlagen sollen im Rahmen dieses Kapitels grob erläutert werden.

### 8.1 Frequenzgang linearer Systeme

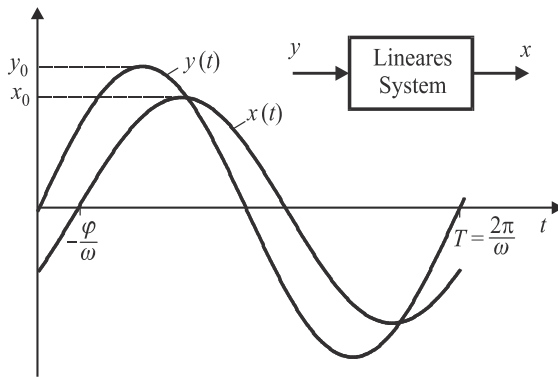
Wir betrachten für unsere nachfolgenden Überlegungen zunächst ein lineares System mit der Eingangsgröße  $y(t)$  und der Ausgangsgröße  $x(t)$ ; dabei kann es sich z. B. um eine Regelstrecke handeln, ebenso gut aber auch beispielsweise um einen PID-Regler. Auf dieses System schalten wir eine harmonische Eingangsgröße der Form

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t), \quad (8.1)$$

also ein sinusförmiges Signal mit der Amplitude  $y_0$  und der (Kreis-)Frequenz  $\omega$ . Betrachten wir den resultierenden Verlauf der Ausgangsgröße  $x(t)$ , so stellen wir fest, dass  $x(t)$  nach einem Einschwingvorgang (dem sogenannten *transienten* Übergang, dessen Dauer und Charakteristik von der Systemdynamik, also insbesondere den Zeitkonstanten des Systems, sowie dem Arbeitspunkt des Systems beim Aufschalten des Sinussignals abhängen) ebenfalls in einen sinusförmigen Verlauf mit *derselben* Frequenz  $\omega$  übergeht, allerdings in der Regel eine andere Amplitude und Phasenlage besitzt, d. h. gegenüber der Eingangsgröße phasenverschoben ist. Formelmäßig lässt sich die Ausgangsgröße dann also darstellen als

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (8.2)$$

Dabei ist  $x_0$  die Amplitude der Ausgangsschwingung und der Winkel  $\varphi$  die Phasenverschiebung zwischen Ein- und Ausgangsgröße (**Bild 8.1**). Häufig eilt die Ausgangsgröße der Eingangsgröße hinterher, sodass  $\varphi$  negative Werte annimmt.



**Bild 8.1** Typischer Verlauf von Ein- und Ausgangsgröße eines linearen Systems bei harmonischer Anregung nach Abklingen des Einschwingvorgangs

Wiederholen wir nun dieses Experiment für einen anderen Wert der Frequenz  $\omega$  unter Beibehaltung der Eingangsamplitude  $y_0$ , so lässt sich erkennen, dass die Frequenz der Ausgangsschwingung *in jedem Fall* mit der Anregungsfrequenz identisch ist – eine Eigenschaft, die in der Linearität des untersuchten Systems begründet ist. Darüber hinaus lässt sich aber auch feststellen, dass die Amplitude  $x_0$  der Ausgangsschwingung ebenso wie die Phasenverschiebung  $\varphi$  zwischen Ein- und Ausgangssignal in den meisten Fällen *frequenzabhängig* ist, sich also bei Variation der Anregungsfrequenz ändert. Diese Abhängigkeit wird als *Frequenzgang* des Systems bezeichnet.

Schaltet man auf ein lineares System ein sinusförmiges Eingangssignal, so nimmt auch das Ausgangssignal nach einem Einschwingvorgang sinusförmigen Verlauf an. Während die Frequenzen von Ein- und Ausgangssignal identisch sind, unterscheiden sich beide Signale in der Regel bezüglich Amplitude und Phasenlage. Amplitude und Phasenlage des Ausgangssignals sind dabei in den meisten Fällen frequenzabhängig.



Die Datei *FrequenzgangPT1.bsy* enthält eine Simulationsstruktur zur Untersuchung des Frequenzgangs eines P-T<sub>1</sub>-Glieds. Stellen Sie am Sinusgenerator unterschiedliche Werte für die Kreisfrequenz ein, und vergleichen Sie Ein- und Ausgangssignal des P-T<sub>1</sub>-Glieds jeweils bezüglich Amplitude und Phasenlage!

Der Frequenzgang besteht einerseits aus dem sogenannten *Amplitudengang*

$$A(\omega) = \frac{x_0}{y_0}, \quad (8.3)$$

der das Verhältnis der Amplituden von Aus- und Eingangssignal in Abhängigkeit von der Frequenz beschreibt. Er wird in der Regelungstechnik häufig in Dezibel (dB) angegeben, wobei die Umrechnung durch die Formel

$$A(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log \frac{x_0}{y_0} \quad (8.4)$$

vorgenommen wird. **Tabelle 8.1** enthält dazu einige Beispielwerte.

**Tabelle 8.1** Beispielwerte für die Umrechnung des frequenzabhängigen Amplitudengangs in Dezibel

$A(\omega)$	$A(\omega) _{\text{dB}}$
0.001	-60
0.01	-40
0.1	-20
0.5 (= 1/2)	-6
0.707 (= $1/\sqrt{2}$ )	-3
1	0
1.414 (= $\sqrt{2}$ )	3
2	6
10	20
100	40
1000	60

Andererseits umfasst der Frequenzgang auch den *Phasengang*  $\varphi(\omega)$ , der die Abhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Ein- und Ausgangssignal von der Frequenz beschreibt. Für die vollständige Beschreibung des Systems muss der Frequenzgang bei zahlreichen Frequenzwerten ermittelt und dann z. B. tabellarisch oder grafisch dargestellt werden.



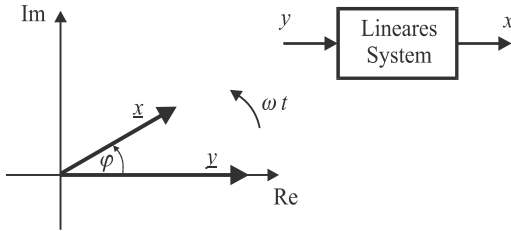
Liegt ein analytisches Systemmodell – beispielsweise in Form einer linearen Differentialgleichung – vor, so kann daraus der zugehörige Frequenzgang direkt rechnerisch ermittelt werden. Dazu werden die harmonische Eingangsgröße

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t)$$

und die resultierende harmonische Ausgangsgröße

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

des linearen Systems als mit der Frequenz  $\omega$  rotierende *Zeiger* der Länge  $y_0$  bzw.  $x_0$  und der Phasenlage 0 bzw.  $\varphi$  in der *komplexen Ebene* dargestellt (**Bild 8.2**).



**Bild 8.2** Zeigerdarstellung von Ein- und Ausgangssignal

Für die beiden Zeiger gilt dann

$$\begin{aligned} \underline{y} &= y_0 e^{j\omega t} \\ \underline{x} &= x_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \end{aligned} \quad (8.5)$$

Der (komplexe) *Frequenzgang*  $F(j\omega)$  des Systems ist nun definiert als das Verhältnis des Zeigers der harmonischen Ausgangsgröße zum Zeiger der harmonischen Eingangsgröße:

$$F(j\omega) = \frac{\text{Zeiger der harmonischen Ausgangsgröße}}{\text{Zeiger der harmonischen Eingangsgröße}}$$

$$F(j\omega) = \frac{\underline{x}}{\underline{y}} = \frac{x_0 e^{j(\omega t + \varphi)}}{y_0 e^{j\omega t}} = \frac{x_0}{y_0} e^{j\varphi}.$$

Der Frequenzgang lässt sich also zerlegen in den Betrag  $|F(j\omega)|$  (Amplitudengang) und die Phase  $\angle F(j\omega)$  (Phasengang) gemäß

$$F(j\omega) = \underbrace{|F(j\omega)|}_{A(\omega) = \frac{x_0}{y_0}} e^{j\overbrace{\angle F(j\omega)}^{\varphi(\omega)}}. \quad (8.6)$$

Betrachten wir nun die allgemeine Differentialgleichung eines linearen Systems  $n$ -ter Ordnung

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_m y^{(m)} + b_{m-1} y^{(m-1)} + \dots + b_1 \dot{y} + b_0 y \quad (8.7)$$

und setzen anstelle der Zeitsignale  $y(t)$  und  $x(t)$  die entsprechenden Zeiger  $\underline{y}$  und  $\underline{x}$  ein. Für die zeitlichen Ableitungen der Zeiger gilt:

$$\begin{aligned} \underline{y} &= y_0 e^{j\omega t} \\ \dot{\underline{y}} &= (j\omega) y_0 e^{j\omega t} = (j\omega) \underline{y} \\ \ddot{\underline{y}} &= (j\omega)(j\omega) y_0 e^{j\omega t} = (j\omega)^2 \underline{y} \\ &\vdots \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\underline{x} &= x_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \\ \dot{\underline{x}} &= (j\omega) x_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = (j\omega) \underline{x} \\ \ddot{\underline{x}} &= (j\omega)(j\omega) x_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = (j\omega)^2 \underline{x} \\ &\vdots\end{aligned}$$

Jede Differentiation entspricht also einer Multiplikation mit  $j\omega$ ! Setzen wir diese Terme in die Differentialgleichung (8.7) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}a_n(j\omega)^n \underline{x} + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} \underline{x} + \dots + a_1(j\omega) \underline{x} + a_0 \underline{x} &= \\ &= b_m(j\omega)^m \underline{y} + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} \underline{y} + \dots + b_1(j\omega) \underline{y} + b_0 \underline{y}.\end{aligned}$$

Für den Frequenzgang ergibt sich also

$$F(j\omega) = \frac{\underline{x}}{\underline{y}} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0}. \quad (8.8)$$

**Beispiel:** Wir betrachten ein P-T<sub>1</sub>-Glied mit der Differentialgleichung

$$T_1 \dot{x} + x = K_P y.$$

Der Vergleich mit Differentialgleichung (8.7) liefert

$$m = 0, n = 1, b_0 = K_P, a_0 = 1, a_1 = T_1.$$

Für den Frequenzgang des P-T<sub>1</sub>-Glieds ergibt sich also

$$F(j\omega) = \frac{K_P}{1 + j\omega T_1}.$$

Daraus folgt für den Betrag zunächst

$$A(\omega) = |F(j\omega)| = \frac{K_P}{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2}}.$$

Zur Berechnung der Phase werden Zähler und Nenner zunächst mit  $1 - j\omega T_1$  multipliziert und der Ausdruck dann in Real- und Imaginärteil aufgespalten:

$$F(j\omega) = \frac{K_P(1 - j\omega T_1)}{(1 + j\omega T_1)(1 - j\omega T_1)} = \frac{K_P - jK_P\omega T_1}{1 + (\omega T_1)^2} = \underbrace{\frac{K_P}{1 + (\omega T_1)^2}}_{\text{Realteil}} + j \underbrace{\frac{-K_P\omega T_1}{1 + (\omega T_1)^2}}_{\text{Imaginärteil}}.$$

Für die Phase gilt dann

$$\varphi(\omega) = \angle F(j\omega) = \arctan \frac{\text{Im}\{F(j\omega)\}}{\text{Re}\{F(j\omega)\}} = \arctan(-\omega T_1).$$