Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Kurt Bohner
Lehrauftrag Mathematik an der KSW Wangen
Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

Ronald Deusch
Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen
Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Fast alle in diesem Buch erwähnten Hard- und Softwarebezeichnungen sind eingetragene Warenzeichen. Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Umschlag: © Adrian Schulz Foto: Mall of Berlin
Bild Kreis links: © Christian Schwier – fotolia.com
Bild Kreis rechts: © Kirill Kedrinski – fotolia.com

* * * * * * * * * *

6. Auflage 2016
© 2005 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de; lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

ISBN 978-3-8120-**0303-2**

Vorwort

Vorbemerkungen

Der vorliegende Band ist ein Arbeitsbuch für den Mathematikunterricht in allen Berufskollegs und in Bildungsgängen, die zur Fachhochschulreife führen. Das Buch behandelt den Lehrstoff des zweiten Schuljahres (BK II) im zweijährigen Berufskolleg, nämlich die trigonometrischen Funktionen, lineare Gleichungssysteme, Differenzial- und Integralrechnung. Grundlage der Inhalte ist der *Lehrplan für Bildungsgänge, die zum Erwerb der Fachhochschulreife führen*, vom August 2015.

Dabei berücksichtigt das Autorenteam die im Lehrplan geforderten Inhalte. Die Autoren orientieren sich an den in den Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife formulierten mathematischen Kompetenzen (Mathematisch modellieren, Werkzeuge und mathematische Darstellungen nutzen, kommunizieren, innermathematische Probleme lösen, Umgang mit formalen und symbolischen Elementen, argumentieren).
Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die in den Bildungsstandards aufgeführten Kompetenzen wie auch die Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

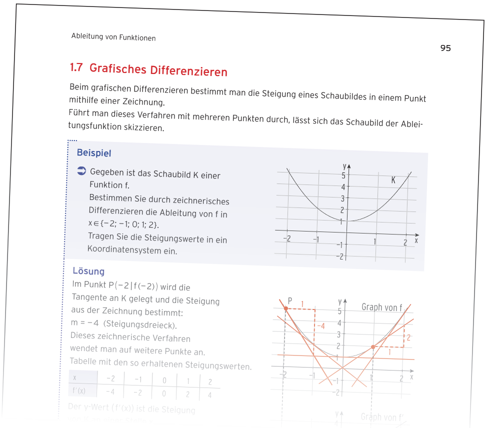
Begleitend wird jeweils ein Arbeitsheft (ISBN 978-3-8120-2303-0) angeboten. Es soll Schüler und Lehrer durch Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung unterstützen.

Alle Titel, mit Ausnahme der Arbeitshefte, können Sie auch für das Digitale Schulbuchregal erhalten.

Sinnvolle Ergänzungen sind die Bücher „Mathematik im Berufskolleg – Prüfungsaufgaben für die Fachhochschulreife“ (ISBN 978-3-8120-0459-6) sowie „Mathematik im Berufskolleg – Prüfungsgrundlagen Analysis“ (ISBN 978-3-8120-0297-4).

Der Aufbau dieses Buches

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.



Ableitung von Funktionen 95

1.7 Grafisches Differenzieren

Beim grafischen Differenzieren bestimmt man die Steigung eines Schaubildes in einem Punkt mithilfe einer Zeichnung.
Führt man dieses Verfahren mit mehreren Punkten durch, lässt sich das Schaubild der Ableitungsfunktion skizzieren.

Beispiel

Gegeben ist das Schaubild K einer Funktion f.
Bestimmen Sie durch zeichnerisches Differenzieren die Ableitung von f in $x \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.
Tragen Sie die Steigungswerte in ein Koordinatensystem ein.

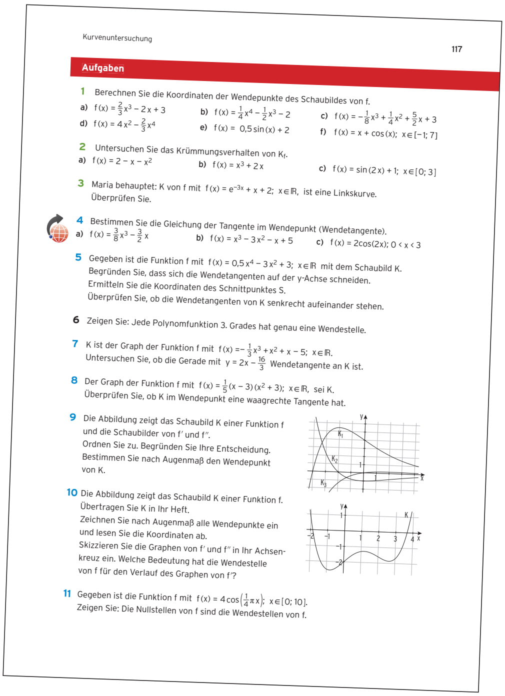
Lösung

Im Punkt $P(-2 \mid f(-2))$ wird die Tangente an K gelegt und die Steigung aus der Zeichnung bestimmt:
$m = -4$ (Steigungsdreieck).
Dieses zeichnerische Verfahren wendet man auf weitere Punkte an.
Tabelle mit den so erhaltenen Steigungswerten.

x	−2	−1	0	1	2
f′(x)	−4	−2	0	2	4

Der y-Wert (f′(x)) ist die Steigung

Jede Lerneinheit endet mit einer umfassenden Anzahl von Aufgaben. Diese sind zur Ergebnissicherungund Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Kompetenzorientierte Fragestellung mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Probleme aus dem Alltag und aus der Wirtschaft stellen einen praktischen Bezug her.
Eine **Differenzierung der Aufgaben nach Schwierigkeit** ist durch Farben gegeben;
grün: grundlegendes Niveau,
blau: mittleres Niveau,
schwarz: gehobenes Niveau.



Kurvenuntersuchung 117

Aufgaben

1 Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Schaubildes von f.
a) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 3$ b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 2$ c) $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + 3$
d) $f(x) = 4x^2 - \frac{2}{3}x^4$ e) $f(x) = 0{,}5\sin(x) + 2$ f) $f(x) = x + \cos(x);\ x \in [-1; 7]$

2 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von K_f.
a) $f(x) = 2 - x - x^2$ b) $f(x) = x^3 + 2x$ c) $f(x) = \sin(2x) + 1;\ x \in [0; 3]$

3 Maria behauptet: K von f mit $f(x) = e^{-3x} + x + 2;\ x \in \mathbb{R}$, ist eine Linkskurve.
Überprüfen Sie.

4 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Wendepunkt (Wendetangente).
a) $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{2}x$ b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 5$ c) $f(x) = 2\cos(2x);\ 0 < x < 3$

5 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^4 - 3x^2 + 3;\ x \in \mathbb{R}$ mit dem Schaubild K.
Begründen Sie, dass sich die Wendetangenten auf der y-Achse schneiden.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S.
Überprüfen Sie, ob die Wendetangenten von K senkrecht aufeinander stehen.

6 Zeigen Sie: Jede Polynomfunktion 3. Grades hat genau eine Wendestelle.

7 K ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x - 5;\ x \in \mathbb{R}$.
Untersuchen Sie, ob die Gerade mit $y = 2x - \frac{16}{3}$ Wendetangente an K ist.

8 Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{5}(x-3)(x^2+3);\ x \in \mathbb{R}$, sei K.
Überprüfen Sie, ob K im Wendepunkt eine waagrechte Tangente hat.

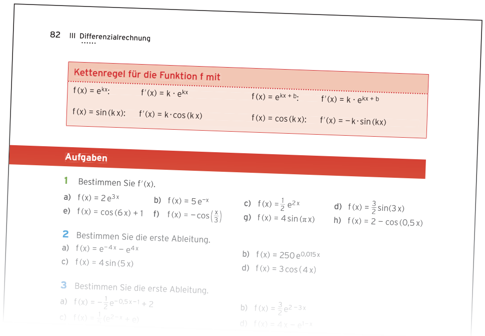
9 Die Abbildung zeigt das Schaubild K einer Funktion f und die Schaubilder von f′ und f″.
Ordnen Sie zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung.
Bestimmen Sie nach Augenmaß den Wendepunkt von K.

10 Die Abbildung zeigt das Schaubild K einer Funktion f.
Übertragen Sie K in Ihr Heft.
Zeichnen Sie nach Augenmaß alle Wendepunkte ein und lesen Sie die Koordinaten ab.
Skizzieren Sie die Graphen von f′ und f″ in Ihr Achsenkreuz ein. Welche Bedeutung hat die Wendestelle von f für den Verlauf des Graphen von f′?

11 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4\cos\left(\frac{1}{4}\pi x\right);\ x \in [0; 10]$.
Zeigen Sie: Die Nullstellen von f sind die Wendestellen von f.

Für Aufgaben mit dem **Download-Logo** stehen ausführliche Lösungen zum Download bereit. Sie finden diese in der Mediathek zum Buch auf unserer Website: http://www.merkur-verlag.de

Definitionen, Festlegungen, Merksätze und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.


82 III Differenzialrechnung

Kettenregel für die Funktion f mit

$f(x) = e^{kx}$: $f'(x) = k \cdot e^{kx}$ $f(x) = e^{kx+b}$: $f'(x) = k \cdot e^{kx+b}$

$f(x) = \sin(kx)$: $f'(x) = k \cdot \cos(kx)$ $f(x) = \cos(kx)$: $f'(x) = -k \cdot \sin(kx)$

Aufgaben

1 Bestimmen Sie f'(x).

a) $f(x) = 2e^{3x}$ b) $f(x) = 5e^{-x}$ c) $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ d) $f(x) = \frac{3}{2}\sin(3x)$

e) $f(x) = \cos(6x) + 1$ f) $f(x) = -\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ g) $f(x) = 4\sin(\pi x)$ h) $f(x) = 2 - \cos(0{,}5x)$

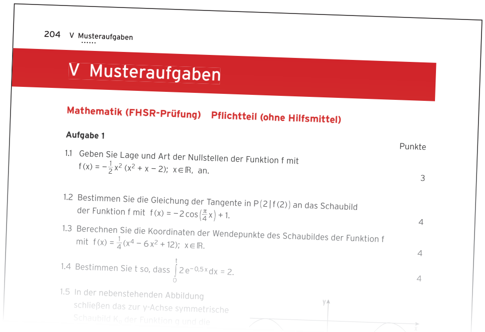
2 Bestimmen Sie die erste Ableitung.

a) $f(x) = e^{-4x} - e^{4x}$ b) $f(x) = 250e^{0{,}015x}$

c) $f(x) = 4\sin(5x)$ d) $f(x) = 3\cos(4x)$

3 Bestimmen Sie die erste Ableitung.

Musteraufgaben: Das Kapitel beinhaltet einen Satz von Musteraufgaben zur Prüfung der Fachhochschulreife ab Schuljahr 2018.


204 V Musteraufgaben

V Musteraufgaben

Mathematik (FHSR-Prüfung) Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 1 Punkte

1.1 Geben Sie Lage und Art der Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2(x^2 + x - 2)$; $x \in \mathbb{R}$, an. 3

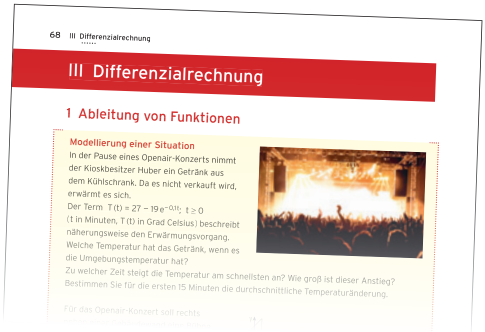
1.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in P(2 | f(2)) an das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 1$. 4

1.3 Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Schaubildes der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}(x^4 - 6x^2 + 12)$; $x \in \mathbb{R}$. 4

1.4 Bestimmen Sie t so, dass $\int_0^t 2e^{-0{,}5x}\,dx = 2$. 4

1.5 In der nebenstehenden Abbildung schließen das zur y-Achse symmetrische

Anhang: Die Aufgaben **„Modellierung einer Situation“** und **„Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse“** werden im Anhang ausführlich gelöst.


68 III Differenzialrechnung

III Differenzialrechnung

1 Ableitung von Funktionen

Modellierung einer Situation

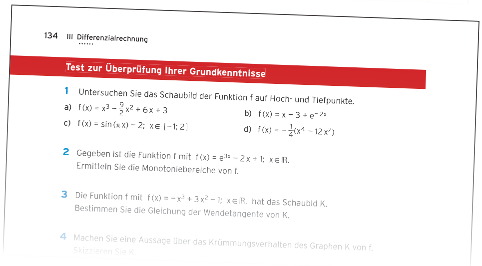
In der Pause eines Openair-Konzerts nimmt der Kioskbesitzer Huber ein Getränk aus dem Kühlschrank. Da es nicht verkauft wird, erwärmt es sich.

Der Term $T(t) = 27 - 19e^{-0{,}1t}$; $t \geq 0$ (t in Minuten, T(t) in Grad Celsius) beschreibt näherungsweise den Erwärmungsvorgang.

Welche Temperatur hat das Getränk, wenn es die Umgebungstemperatur hat?

Zu welcher Zeit steigt die Temperatur am schnellsten an? Wie groß ist dieser Anstieg?

Bestimmen Sie für die ersten 15 Minuten die durchschnittliche Temperaturänderung.


134 III Differenzialrechnung

Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

1 Untersuchen Sie das Schaubild der Funktion f auf Hoch- und Tiefpunkte.

a) $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + 3$ b) $f(x) = x - 3 + e^{-2x}$

c) $f(x) = \sin(\pi x) - 2$; $x \in [-1; 2]$ d) $f(x) = -\frac{1}{4}(x^4 - 12x^2)$

2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{3x} - 2x + 1$; $x \in \mathbb{R}$. Ermitteln Sie die Monotoniebereiche von f.

3 Die Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$; $x \in \mathbb{R}$, hat das Schaubild K. Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente von K.

Inhaltsverzeichnis