

# Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

## Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

---

Die Verfasser:

**Roland Ott**

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

**Kurt Bohner**

Lehrauftrag Mathematik an der KSW Wangen

Studium der Mathematik und Physik an der Universität Konstanz

**Ronald Deusch**

Lehrauftrag Mathematik am BSZ Bietigheim-Bissingen

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Fast alle in diesem Buch erwähnten Hard- und Softwarebezeichnungen sind eingetragene Warenzeichen. Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Umschlag: © Adrian Schulz Foto: Mall of Berlin

Bild Kreis links: © Christian Schwier - fotolia.com

Bild Kreis rechts: © Kirill Kedrinski - fotolia.com

\* \* \* \* \*

3. Auflage 2016

© 2005 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung: MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: [info@merkur-verlag.de](mailto:info@merkur-verlag.de); [lehrer-service@merkur-verlag.de](mailto:lehrer-service@merkur-verlag.de)

Internet: [www.merkur-verlag.de](http://www.merkur-verlag.de)

ISBN 978-3-8120-0519-7

# Vorwort

## Vorbemerkungen

Der vorliegende Band ist ein Arbeitsbuch für den Mathematikunterricht in allen Berufskollegs und in Bildungsgängen, die zur Fachhochschulreife führen. Das Buch behandelt den gesamten Lehrstoff des Berufskollegs, nämlich die Polynomfunktionen, die Exponentialfunktionen und deren Linearkombinationen mit linearen Funktionen, die trigonometrischen Funktionen, lineare Gleichungssysteme, Differenzial- und Integralrechnung. Grundlage der Inhalte ist der Lehrplan für Bildungsgänge, die zum Erwerb der Fachhochschulreife führen, vom August 2015. Grundlage der Inhalte ist der *Lehrplan für Bildungsgänge, die zum Erwerb der Fachhochschulreife führen*, vom August 2015.

Dabei berücksichtigt das Autorenteam die im Lehrplan geforderten Inhalte. Die Autoren orientieren sich an den in den Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife formulierten mathematischen Kompetenzen (Mathematisch modellieren, Werkzeuge und mathematische Darstellungen nutzen, kommunizieren, innermathematische Probleme lösen, Umgang mit formalen und symbolischen Elementen, argumentieren).

Von den Autoren wurde bewusst darauf geachtet, dass die in den Bildungsstandards aufgeführten Kompetenzen wie auch die Zielformulierungen inhaltlich vollständig und umfassend thematisiert werden. Dabei bleibt den Lehrkräften genügend didaktischer Freiraum, eigene Schwerpunkte zu setzen.

Begleitend wird ein Arbeitsheft (ISBN 978-3-8120-2519-5) angeboten. Es soll Schüler und Lehrer durch Aufgaben zur Wiederholung und Vertiefung unterstützen.



**Alle Titel, mit Ausnahme der Arbeitshefte, können Sie auch für das Digitale Schulbuchregal erhalten.**

Sinnvolle Ergänzungen sind die Bücher „Mathematik im Berufskolleg - Prüfungsaufgaben für die Fachhochschulreife“ (ISBN 978-3-8120-0459-6) sowie „Mathematik im Berufskolleg - Prüfungsgrundlagen Analysis“ (ISBN 978-3-8120-0297-4).

# Der Aufbau dieses Buches

Der Stoff in den einzelnen Kapiteln wird schrittweise anhand von **Musterbeispielen mit ausführlichen Lösungen** erarbeitet. Dabei legen die Autoren großen Wert auf die Verknüpfung von Anschaulichkeit und sachgerechter mathematischer Darstellung. Die übersichtliche Präsentation und die methodische Aufarbeitung beeinflusst den Lernerfolg positiv und bietet dem Schüler die Möglichkeit, Unterrichtsinhalte selbstständig zu erschließen bzw. sich anzueignen.

Jede Lerneinheit endet mit einer umfassenden Anzahl von Aufgaben. Diese sind zur Ergebnissicherung und Übung gedacht, aber auch als Hausaufgaben geeignet. Kompetenzorientierte Fragestellung mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad ermöglichen es dem Schüler, den Stoff zu festigen und zu vertiefen. Beispiele und Probleme aus dem Alltag und aus der Wirtschaft stellen einen praktischen Bezug her.

Eine **Differenzierung der Aufgaben nach Schwierigkeit** ist durch Farben gegeben; **grün**: grundlegendes Niveau, **blau**: mittleres Niveau, **schwarz**: gehobenes Niveau.

Für Aufgaben mit dem **Download-Logo** stehen ausführliche Lösungen zum Download bereit. Sie finden diese in der Mediathek zum Buch auf unserer Website: <http://www.merkur-verlag.de>

**Definitionen, Festlegungen, Merksätze** und mathematisch wichtige **Grundlagen** sind in Rot gekennzeichnet.

Polynomfunktionen (Ganzrationale Funktionen) 63

**C) Gegenseitige Lage von zwei Kurven**

**Beispiel**

Bei der Produktion eines Artikels werden die Gesamtkosten in € pro Tag, in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge  $x$  (in Stück), festgelegt durch:  
 $K(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 200$ ;  $0 \leq x < 90$

Der Betrieb hat einen konstanten Verkaufspreis von 14 € je Stück geplant.

- Beschreiben Sie die gegenseitige Lage von Gesamtkostenkurve und Erlösgerade.
- Bestimmen Sie grafisch und rechnerisch, für welche Stückzahlen der Erlös und die Gesamtkosten gleich groß sind (Gewinnschwelle und Gewinngrenze).
- Für welche Produktionsmenge beträgt der Gewinn 100 €?

**Lösung**

a) Kostenkurve und Erlösgerade  
 Erlösfunktion  $E$  mit  $E(x) = 14x$   
 (10 Stück = 1 LE; 200 € = 1 LE)

Kostenkurve und Erlösgerade schneiden sich in zwei Punkten.

b) Aus der Zeichnung: Erlös und Gesamtkosten sind gleich groß in  $x = 20$  bzw.  $x = 80$ .  
 Berechnung der Schnittpunkte von Erlösgerade und Gesamtkostenkurve  
 Bedingung:  $E(x) = K(x)$   
 $14x = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 200$   
 Nullform:  
 $\frac{1}{2}x^2 - 11x + 200 = 0$   
 Lösung (Schnittpunkte):  
 $x_1 = 20$ ;  $x_2 = 80$

Polynomfunktionen (Ganzrationale Funktionen) 67

**Aufgaben**

- Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der Schaubilder  $K$  von  $f$  und  $G$  von  $g$ .  
 a)  $f(x) = x^2$ ;  $g(x) = 4x$     b)  $f(x) = x^2 + t$ ;  $g(x) = 2x$     c)  $f(x) = x^2 + t$ ;  $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$
- Untersuchen Sie, ob die Parabel  $K$  von  $f$  und die Gerade  $G$  von  $g$  gemeinsame Punkte besitzen. Bestimmen Sie deren Koordinaten. Wie liegen Parabel und Gerade zueinander?  
 a)  $f(x) = 2x^2 - 6x + 2$ ;  $g(x) = -2x + 6$     b)  $f(x) = x^2 + x - 5$ ;  $g(x) = 3x - 6$
- Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der beiden Graphen  $K$  von  $f$  und  $G$  von  $g$ . Welche Lage haben die beiden Graphen zueinander?  
 a)  $K$ :  $f(x) = x^2 + 3x$      $G$ :  $g(x) = 0,5x^2$   
 b)  $K$ :  $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$      $G$ :  $g(x) = x^2 + 2x - 1$   
 c)  $K$ :  $f(x) = -x^2 + 3x - 1,5$      $G$ :  $g(x) = 2,5x - x^2$
- $K$  ist das Schaubild der Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 5x + 4$ ;  $x \in \mathbb{R}$ .  
 a) Die Gerade  $g$  mit der Gleichung  $y = \frac{2}{3}x + 3$  schneidet  $K$  in zwei Punkten  $S_1$  und  $S_2$ . Berechnen Sie die Koordinaten von  $S_1$  und  $S_2$ .  
 b) Zeigen Sie: Die Ursprungsgerade  $h$  mit der Steigung  $m = -\frac{3}{2}$  berührt  $K$ . Geben Sie die Koordinaten des Berührungspunktes an.  
 Welche auf der Geraden  $h$  senkrecht stehende Gerade schneidet  $K$  in  $P(3|f(3))$ ?
- $K$  ist der Graph der Funktion  $f$  mit  $f(x) = (1-x)(2x+5)$ ;  $x \in \mathbb{R}$ .  
 a) Die Gerade  $g$  verläuft parallel zur  $x$ -Achse durch  $A(1|3)$ . Wie liegen  $K$  und  $g$  zueinander? Welche Parallele zu  $g$  ist Tangente an  $K$  von  $f$ ?  
 b) Welche Gerade mit Steigung  $-3$  berührt  $K$ ?  
 c) Zeigen Sie: Die Gerade  $h$  mit der Gleichung  $y = -\frac{3}{2}x + 9$  und die Parabel  $K$  von  $f$  haben keinen gemeinsamen Punkt.
- Die Abbildung zeigt die Parabeln  $K$  von  $f$  mit  $f(x) = -0,5x^2 - x + 3$  und  $G$  von  $g$  mit  $g(x) = x^2 - 8x + 12$ .  
 Beschriften Sie die Achsen.  
 Ordnen Sie jeder Funktion ihr Schaubild zu.  
 Begründen Sie Ihre Wahl.  
 Zeigen Sie, die Gerade  $h$  schneidet eine Parabel und berührt die andere Parabel.
- Gegeben ist die Kostenfunktion  $K$  mit  $K(x) = 0,025x^2 + 2x + 160$ ;  $x > 0$ .  
 a) Welche Ursprungsgerade  $h$  schneidet die Kostenkurve in  $x = 20$ ?  
 Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden und die Koordinaten des weiteren Schnittpunktes. In welchem Bereich verläuft die Gerade  $h$  oberhalb der Parabel?  
 Interpretieren Sie den Sachverhalt ökonomisch.  
 b) Zeigen Sie: Die Ursprungsgerade mit Steigung  $6$  berührt die Kostenkurve.  
 Bestimmen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes.

Hinweis: Das Kapital vermehrt sich um 60% Wachstumsfaktor 1,60.  
 $y = 1000 \cdot 0,6^{70t}$  bezeichnet man als **Wachstumsgleichung**.

**Beachten Sie:**

Prozesse **exponentiellen Wachstums** können mit einer Exponentialfunktion beschrieben werden:  $f(t) = a \cdot e^{kt}$ ;  $t \geq 0$   
 $a > 0$  ist die **Wachstumskonstante**;  $a = f(0)$  ist der **Anfangsbestand**

b) Bed. für die **Verdoppelungszeit**:  $f(t) = 2 \cdot f(0)$   
 $2000 = 1000 \cdot e^{0,07701 \cdot t}$   
 $e^{0,07701 \cdot t} = 2$   
 Logarithmieren ergibt:  $t = \frac{\ln 2}{0,07701} \approx 9,0$

**Musteraufgaben:** Das Kapitel beinhaltet einen Satz von Musteraufgaben zur Prüfung der Fachhochschulreife ab Schuljahr 2018.

**Grundwissen:** Die Schüler im Berufskolleg kommen aus verschiedenen Schularten mit unterschiedlichen Vorkenntnissen. Um die Schüler dennoch möglichst schnell auf ein gleiches Wissensniveau zu bringen und damit gleiche Ausgangsbedingungen für den Mathematikunterricht zu schaffen, gibt es ein umfangreiches **Kapitel zur Wiederholung** der grundlegenden Rechentechniken und aller mathematischen Grundlagen aus der Mittelstufe.

Die **Heftklammer** im Lehrbuch mit Seitenangabe weist auf ein entsprechendes Grundwissenkapitel im Anhang hin.

Die Aufgaben „**Modellierung einer Situation**“ und „**Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse**“ werden im Anhang ausführlich gelöst.

349

## V Musteraufgaben

**Mathematik (FHSR-Prüfung) Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)**

**Aufgabe 1** Punkte

- 1.1 Geben Sie Lage und Art der Nullstellen der Funktion  $f$  mit  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2(x^2 + x - 2)$ ;  $x \in \mathbb{R}$ , an. 3
- 1.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in  $P(2|f(2))$  am das Schaubild der Funktion  $f$  mit  $f(x) = -2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$ . 4
- 1.3 Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Schaubildes der Funktion  $f$  mit:  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 12x$ ;  $x \in \mathbb{R}$ . 4
- 1.4 Bestimmen Sie  $f$  so, dass  $\int_2^3 2 \cdot f(x) dx = 2$ . 4


353


## VI Grundwissen


### 1 Intervalle als Teilmengen der reellen Zahlen

**Beispiele**

$[0; 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$  alle reellen Zahlen von 0 bis 5, einschließlich 0 und 5  
 $(-2; 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$  alle reellen Zahlen zwischen  $-2$  bis  $2$ , ausschließlich  $-2$  und einschließlich  $2$   
 $]1; 6[ = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 6\}$  alle reellen Zahlen größer als 1 und kleiner als 6  
 $\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{Z}\}$  alle reellen Zahlen größer oder gleich 1

**Geschlossenes Intervall:**  $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  

**Offenes Intervall:**  $]a; b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  

**Halboffenes Intervall:**  $[a; b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$  

**Aufgaben**

1. Schreiben Sie als Intervall
2. Geben Sie die Lösungsmenge  $M$  der Ungleichung  $|x - 2| \leq 3$  an. Geben Sie die Lösungsmenge  $N$  der Ungleichung  $|x - 2| < 3$  an.

56 1 Funktionen

### 2.2.3 Quadratische Gleichungen und geometrische Interpretation

**A) Lösung von quadratischen Gleichungen**

	Nullprodukt
<p><b>Beispiel:</b> <math>x^2 = 9</math></p> <p>Wurzelziehen: <math>x_{1/2} = \pm\sqrt{9}</math></p> <p>Lösung: <math>x_1 = 3; x_2 = -3</math></p>	<p><b>Beispiel:</b> <math>(x - 3)(x + 5) = 0</math></p> <p>Satz vom Nullprodukt: <math>x - 3 = 0</math> oder <math>x + 5 = 0</math></p> <p>Lösung: <math>x_1 = 3; x_2 = -5</math></p>

47

## Polynomfunktionen (Ganzrationale Funktionen)


### 2.2 Quadratische Funktionen

**Modellierung einer Situation**

Die Firma Waldner stellt unter anderem ein medizinisches Gerät her. Die Herstellkosten sind in der Tabelle aufgeführt.

Menge in Stück	0	10	40
Herstellkosten $K(x)$ in 1000 €	8	16,25	16

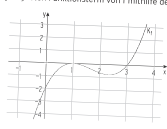
Eine Marktforschung ergab einen mittleren Ver-



122 Funktionen

## Test zur Überprüfung Ihrer Grundkenntnisse

1. Bestimmen Sie einen geeigneten Funktionsterm von  $f$  mithilfe der Abbildung.
 


2. Lösen Sie die Gleichungen.
 

a)  $x^2 + 2x^2 - 24x = 0$       b)  $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3} = 0$       c)  $2x^2 + \frac{1}{3}x^4$
3.  $K$  ist das Schaubild von  $f$  mit  $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
- 3a) Skizzieren Sie  $K$  und beschreiben Sie den Verlauf von  $K$ .  
 (Skizzieren Sie die Nullstellen von  $f$ .)

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>5</b>
<b>I Funktionen</b>	<b>11</b>
1 Einführung in Funktionen	11
1.1 Das rechtwinklige Koordinatensystem	12
1.2 Abhängigkeiten und grafische Darstellung	15
1.3 Definition einer Funktion	17
2 Polynomfunktionen (Ganzrationale Funktionen)	22
2.1 Lineare Funktionen	22
2.1.1 Einführung	23
2.1.2 Die Steigung einer Geraden	25
2.1.3 Punktprobe	29
2.1.4 Aufstellen von Geradengleichungen	30
2.1.5 Schnittpunkte	34
2.1.6 Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben	43
2.2 Quadratische Funktionen	47
2.2.1 Einführungsbeispiel	48
2.2.2 Von der Normalparabel zur allgemeinen Parabel	49
2.2.3 Quadratische Gleichungen und geometrische Interpretation	56
2.2.4 Aufstellen von Parabelgleichungen	69
2.2.5 Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben	77
2.3 Polynomfunktionen höheren Grades	81
2.3.1 Potenzfunktionen	82
2.3.2 Polynomfunktionen 3. Grades – Einführung	84
2.3.3 Polynomfunktionen 4. Grades – Einführung	88
2.3.4 Polynomgleichungen und geometrische Interpretation	93
2.3.5 Aufstellen von Funktionstermen	109
2.3.6 Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben	117
3 Exponentialfunktionen	123
3.1 Einführungsbeispiele	124
3.2 Definition einer Exponentialfunktion	126
3.3 Die Euler'sche Zahl $e$	128
3.4 Exponentialfunktionen zur Basis $e$	129
3.5 Schaubilder von Exponentialfunktionen	131
3.6 Exponentialgleichungen und geometrische Interpretation	137
3.6.1 Der natürliche Logarithmus	137
3.6.2 Exponentialgleichungen	138
3.6.3 Bestimmung von gemeinsamen Punkten	142
3.7 Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben	147
3.7.1 Exponentielles Wachstum	147
3.7.2 Beschränktes Wachstum	153

4	Trigonometrische Funktionen	156
4.1	Einführungsbeispiele	157
4.2	Definition der Winkelfunktionen	158
4.2.1	Definition der Winkelfunktionen für Winkel von $0^\circ$ bis $90^\circ$	158
4.2.2	Definition der Winkelfunktionen für beliebige Winkel	162
4.2.3	Das Bogenmaß eines Winkels	166
4.3	Trigonometrische Funktionen	167
4.3.1	Sinus- und Kosinusfunktion	167
4.3.2	Funktionen der Form $f(x) = a \sin(x) + b$ bzw. $f(x) = a \cos(x) + b$	168
4.3.3	Funktionen der Form $f(x) = a \sin(kx) + b$ bzw. $f(x) = a \cos(kx) + b$	172
4.4	Trigonometrische Gleichungen und geometrische Interpretation	177
4.4.1	Lösung von trigonometrischen Gleichungen	177
4.4.2	Gemeinsame Punkte	186
4.5	Modellierung und anwendungsorientierte Aufgaben	192

## II Lineare Gleichungssysteme 196

1	Einführung	197
2	Umformung und Lösung eines linearen Gleichungssystems	199
2.1	Das LGS ist eindeutig lösbar	199
2.2	Das LGS ist unlösbar	203
2.3	Das LGS ist mehrdeutig lösbar	204
2.4	Anwendungen	210

## III Differenzialrechnung 213

1	Ableitung von Funktionen	213
1.1	Änderungsrate	214
1.2	Definition der Ableitung	218
1.3	Ableitungsregeln	220
1.4	Ableitung und Steigung	229
1.5	Tangente	231
1.6	Senkrecht schneiden, Berühren	237
1.7	Grafisches Differenzieren	240
2	Kurvenuntersuchung	244
2.1	Monotonie	245
2.2	Extrempunkte	249
2.3	Wendepunkte	256
2.4	Aufgabenbeispiele zur Kurvenuntersuchung	265
2.5	Aufstellen von Kurvengleichungen aus gegebenen Bedingungen	271
3	Modellierung realer Probleme	280
3.1	Modellierung von Optimierungsproblemen	281
3.2	Modellierung von Wachstums- und Zerfallsprozessen	284
3.3	Modellierung in der Physik	287
3.4	Modellierung in der Kostentheorie	290

**IV Integralrechnung 293**

1	Einführung .....	294
2	Stammfunktion und unbestimmtes Integral .....	296
3	Das bestimmte Integral .....	308
4	Flächeninhaltsberechnung mithilfe der Integralrechnung .....	317
4.1	Fläche zwischen Kurve und x-Achse .....	317
4.2	Fläche zwischen zwei Kurven .....	324
4.3	Besondere Aufgabenstellungen bei der Flächeninhaltsberechnung .....	333
5	Anwendungen der Integralrechnung .....	340
5.1	Flächen in anwendungsorientierten Aufgaben .....	341
5.2	Weitere Anwendungen des Integrals in Natur, Technik und Wirtschaft .....	343

**V Musteraufgaben 349****VI Grundwissen 353**

1	Intervalle als Teilmengen der reellen Zahlen .....	353
2	Algebraische Begriffe und Vorübungen .....	354
2.1	Begriffe .....	354
2.2	Rechnen mit Summen und Differenzen .....	354
2.3	Rechnen mit Brüchen .....	356
2.4	Vereinfachung durch Ausklammern .....	357
2.5	Rechnen mit Potenzen .....	358
3	Gleichung und Gleichungssystem .....	360
3.1	Lineare Gleichungen .....	360
3.2	Lineare Gleichungssysteme .....	362
3.3	Quadratische Gleichungen .....	364

**Anhang 368**

	Lösungen der Modellierungen und Tests .....	368
	Lösungen der Aufgaben im Kapitel Grundwissen .....	389
	Mathematische Zeichen .....	392
	Stichwortverzeichnis .....	393
	Abbildungsverzeichnis .....	396