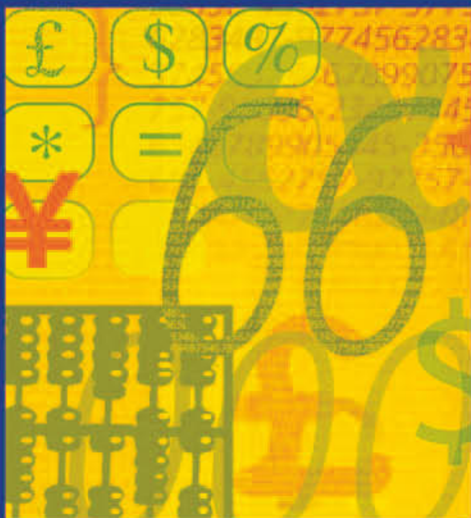

wi wirtschaft

Fred Böker

Formelsammlung für Wirtschaftswissenschaftler

Mathematik und Statistik

PEARSON Studium

Inhaltsübersicht

Interpretation als Volumen

Falls $f(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y) \in R$, kann das Doppelintegral als Volumen unterhalb des Graphen überhalb R interpretiert werden.

Multiple Integrale

Sei $\Omega = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ das kartesische Produkt der abgeschlossenen Intervalle $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$. Falls f eine stetige Funktion auf Ω ist, wird das multiple Integral von f über Ω definiert durch

$$\int\int \ldots \int_{\Omega} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}\, dx_n =$$

$$\int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \ldots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)\, dx_1 \right) \ldots dx_{n-1} \right) dx_n$$

Dabei wird das Integral auf der rechten Seite wie folgt berechnet:

- Integrieren Sie zunächst bezüglich x_1, indem Sie die anderen Variablen als konstant betrachten.
- Integrieren Sie dann bezüglich x_2, indem Sie die restlichen Variablen $(x_3, \ldots, x_n)$ als konstant betrachten.
- Integrieren Sie dann bezüglich x_3 usw.

Das Ergebnis ist unabhängig von der Reihenfolge der Integration.

Doppelintegrale über allgemeinere Mengen

- Sei $A = \{(x, y) \colon a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x)\}$, wobei $u(x)$ und $v(x)$ stetige Funktionen sind mit der Eigenschaft $u(x) \leq v(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Es ist dann

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

- Sei $B = \{(x, y) \colon c \leq y \leq d, p(y) \leq x \leq q(y)\}$, wobei $p(y)$ und $q(y)$ stetige Funktionen sind mit der Eigenschaft $p(y) \leq q(y)$ für alle $y \in [c, d]$. Es ist dann

$$\iint_B f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y)\, dx \right) dy$$

Berechnungsformel

Sei $f(x, y)$ stetig auf $R = [a, b] \times [c, d]$. Es gelte $\dfrac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$ für alle $(x, y) \in R$. Dann gilt

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

Wechsel der Variablen

Es sei

$$x = g(u, v), \quad y = h(u, v)$$

eine umkehrbar eindeutige stetig differenzierbare Transformation von einer offenen beschränkten Menge A' der uv-Ebene auf eine offene beschränkte Menge A der xy-Ebene. Die **Jacobi-Determinante**

$$\frac{\partial(g, h)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix}$$

sei beschränkt auf A'. Sei f eine auf A definierte beschränkte stetige Funktion. Dann gilt

$$\int \int_A f(x, y)\, dxdy = \int \int_{A'} f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{\partial(g, h)}{\partial(u, v)} \right| dudv$$

Es sei

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) = (g_1(\boldsymbol{u}), \ldots, g_n(\boldsymbol{u})) \qquad \boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$$

eine umkehrbar eindeutige stetig differenzierbare Transformation von einer offenen beschränkten Menge A' im „$\boldsymbol{u}$-Raum“ auf eine offene beschränkte Menge A im „$\boldsymbol{x}$-Raum“. Die **Jacobi-Determinante**

$$J = \frac{\partial(g_1, \ldots, g_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

sei beschränkt auf A'. Sei f eine auf A definierte beschränkte stetige Funktion. Dann gilt

$$\int \ldots \int_A f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int \ldots \int_{A'} f(g_1(\boldsymbol{u}), \ldots, g_n(\boldsymbol{u}))\, |J|\, du_1 \ldots du_n$$

7

7.5 Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung* ist eine Gleichung, in der eine Funktion f und ihre Ableitung f' bzw. $\dot{f}$ vorkommen.†

$$\dot{x}(t) = f(t) \iff x(t) = \int f(t)\,dt + C$$

Drei einfache Differentialgleichungen

Gesetz des natürlichen Wachstums:

$$\dot{x}(t) = rx(t),\ \ x(0) = x_0 \iff x(t) = x_0 e^{rt}$$

Wachstum gegen eine obere Schranke:

$$\dot{x}(t) = a(K - x(t)),\ x(0) = x_0 \iff x(t) = K - (K - x_0)e^{-at}$$

Logistisches Wachstum:

$$\dot{x}(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right),\ x(0) = x_0 \iff x(t) = \frac{K}{1 + \dfrac{K - x_0}{x_0}e^{-rt}}$$

* Differentialgleichungen werden ausführlich in Kap. 14 behandelt.
† Zur Punktnotation siehe S. 83.

Kapitel 8
Finanzmathematik

8.1 Zinsperioden und effektive Raten

Grundbegriffe der Prozentrechnung

1% eines Grundwertes K bedeutet ein **Hundertstel** dieses Grundwertes, entsprechend bedeuten $p\%$ von K das p-fache des einhundertsten Teils.

$$1\% = \frac{1}{100} = 0.01 \qquad p\% = \frac{p}{100} = i \text{ (oder } = r) \qquad p\% \text{ von } K = K \cdot \frac{p}{100} = K \cdot i$$

$Z = K \cdot i = K \cdot \dfrac{p}{100}$ **Prozentwert**; K **Grundwert**, Grundgröße, Basiswert, Basisgröße oder **Bezugsgröße**; p **Prozentfuß** ($= 100 \cdot i$); $i(= \dfrac{p}{100}) = p\%$ **Prozentsatz**

$Z = K \cdot i \iff K = \dfrac{Z}{i} \iff i = \dfrac{Z}{K}$

Vermehrter Grundwert: $K^+ = K(1+i) \iff K = \dfrac{K^+}{1+i}$

Verminderter Grundwert: $K^- = K(1-i) \iff K = \dfrac{K^-}{1-i}$

$K^* = K(1+i)$ (vermehrter Grundwert, falls i positiv, verminderter Grundwert, falls i negativ)

Lineare Verzinsung

Definition

Bei linearer (einfacher) Verzinsung werden die Zinsen zeitanteilig berechnet und erst am Ende der Laufzeit dem Kapital zugeschlagen (bzw. mit dem Kapital verrechnet). Innerhalb der Laufzeit existiert kein Zinszuschlagstermin.

Zinsen und Endwert bei linearer Verzinsung

Ein Anfangskapital K_0 werde linear mit einem (nachschüssigen auf eine Zeiteinheit bezogenen) Zinssatz $i = \dfrac{p}{100} = p\%$ über eine Laufzeit (Kapitalüberlassungsfrist, gemessen in denselben Zeiteinheiten wie beim Zinssatz) von n Perioden verzinst. Dann sind am Ende der Kapitalüberlassungsfrist die Zinsen

$$Z_n = K_0 \cdot i \cdot n$$

fällig. Das Endkapital ist dann

$$K_n = K_0(1 + i \cdot n)$$

8

Die letzte Formel lässt sich nach K_0, i bzw. n auflösen:

$K_0 = \frac{K_n}{1 + i \cdot n}$ **Abzinsen**, d.h. Berechnung des **Barwertes** oder Anfangswertes

$i = \frac{1}{n}\left(\frac{K_n}{K_0} - 1\right)$ Berechnung des Zinssatzes

$n = \frac{1}{i}\left(\frac{K_n}{K_0} - 1\right)$ Berechnung der Laufzeit

Der Endwert einer **Zahlungsreihe** (d.h. einer Gesamtheit von unterschiedlichen und zu unterschiedlichen Zeitpunkten fälligen Zahlungen) darf durch getrenntes lineares Aufzinsen zum gemeinsamen Stichtag und Saldierung am Laufzeitende, das am Tag der letzten vorkommenden Zahlung oder später liegen muss, ermittelt werden.

Äquivalenz zweier Zahlungen

Die Zahlungen/Kapitalbeträge K_0 (fällig im Zeitpunkt 0) und K_n (fällig im Zeitpunkt n, d.h. n Zeiteinheiten später) heißen bei linearer Verzinsung (zum Zinssatz i pro Zeiteinheit) äquivalent, wenn gilt:

$$K_n = K_0(1 + i \cdot n)$$

8

Konvention: Stichtag bei linearer Verzinsung

Werden Zahlungsreihen mit Hilfe der linearen Verzinsung saldiert oder verglichen, soll als gemeinsamer Bewertungsstichtag der Tag der letzten vorkommenden Zahlung gewählt werden (oder es muss ausdrücklich ein anderer Stichtag) vereinbart sein.

Äquivalente Zahlungsreihen

Zwei Zahlungsreihen A, B heißen bei linearer Verzinsung zum Zinssatz i äquivalent, wenn sie – aufgezinst auf den Tag der letzten vorkommenden Zahlung – denselben Wert ergeben.

Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik

Zwei Zahlungsreihen A, B dürfen nur dann verglichen (im Sinne der Äquivalenz), addiert oder subtrahiert werden, wenn sämtliche vorkommenden Zahlungen zuvor auf einen und denselben Stichtag transformiert wurden. Der verwendete (lineare Jahres-) Zinssatz keißt **Kalkulationszinssatz**.

Effektivzinssatz

Derjenige (nachschüssige) Zinssatz i, für den zwei Zahlungsreihen A, B äquivalent werden, heißt Effektivzinssatz des zugrunde liegenden Vorgangs.

Mittlerer Zahlungstermin, Zeitzentrum bei linearer Verzinsung

Gegeben sei eine Zahlungsreihe mit den Einzelzahlungen $K_1, K_2, \ldots, K_m$, die zu genau definierten Zeitpunkten fällig sind. Sämtliche Zahlungen sind äquivalent (d.h. ohne Zinsvor- oder -nachteile) ersetzbar durch die einmalige Zahlung $K = K_1 + \ldots + K_m$ des nominellen Gesamtbetrages. Der Fälligkeitstag (Zeitzentrum der Zahlungsreihe, mittlerer Zahlungstermin) liegt

$$t = \frac{K_1 t_1 + K_2 t_2 + \ldots + K_m t_m}{K_1 + K_2 + \ldots + K_m}$$

Zeiteinheiten vor einem zu wählenden Stichtag (= Tag der letzten Einzahlung oder später). Dabei sind $t_1, \ldots, t_m$ die Zeitspannen von $K_1, \ldots, K_m$ bis zum Stichtag. Die im mittleren Zahlungstermin geleistete Einzelzahlung $K = K_1 + \ldots + K_m$ führt zu jedem Stichtag, der nicht früher liegt als K_m, zum gleichen Endwert wie die einzelnen Zahlungen insgesamt.

Exponentielle Verzinsung oder Zinseszinsen

Definition

Bei exponentieller Verzinsung (Zinseszinsen) werden die Zinsen nach jeder Zinsperiode dem Kapital hinzugefügt und werden von da an selbst wieder verzinst. Innerhalb der Laufzeit liegen ein oder mehrere Zinszuschlagtermine. Unter einer **Zinsperiode** versteht man die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Zinsauszahlungen. Die **periodische Rate** ist die Zinsrate pro Periode = jährliche Rate/Anzahl der Zinsperioden.

Zinsen, Endwert und effektiver Zinssatz

Ein Anfangskapital S_0 werde mit $r = p/100 = p\%$ Zinsen* pro Periode exponentiell verzinst. Die Zinsen nach der ersten Periode sind: $S_0 \cdot r = S_0 \cdot p/100$

Das Endkapital nach t Perioden ist dann

$$S_t = S_0(1 + r)^t \qquad \text{wobei} \qquad r = p/100$$

Diese Formel lässt sich nach S_0, $q = 1 + r$, r, p bzw. t auflösen:

* In Zukunft wird r Zinsrate und p Zinssatz genannt.

8

$S_0 = S_t(1+r)^{-t} = \frac{S_t}{(1+r)^t}$ Abzinsen, d.h. Berechnung des Anfangswertes

$q = 1 + r = \left(\frac{S_t}{S_0}\right)^{1/t} = \sqrt[t]{\frac{S_t}{S_0}}$ Berechnung des Aufzinsungsfaktors

$r = \left(\frac{S_t}{S_0}\right)^{1/t} - 1 = \sqrt[t]{\frac{S_t}{S_0}} - 1$ Berechnung der Zinsrate

$p = 100\left(\left(\frac{S_t}{S_0}\right)^{1/t} - 1\right) = 100\left(\sqrt[t]{\frac{S_t}{S_0}} - 1\right)$ Berechnung des Zinsfußes

$t = \frac{\ln S_t - \ln S_0}{\ln(1+r)} = \frac{\ln S_t - \ln S_0}{\ln q}$ Berechnung der Laufzeit

Die Änderungsrate (Wachstumsgeschwindigkeit) ist:

$$S'(t) = S_0(1+r)^t \ln(1+r) = \ln(1+r)S_t$$

Bei n Zinsperioden pro Jahr und einer nominellen Jahreszinsrate $r_{nom} = r = p/100$ ist die relative unterjährige Periodenzinsrate, d.h. die Zinsrate pro Periode $r_p = r_{rel} = r/n$, d.h. $r_{nom} = n \cdot r_{rel}$ und $r_{rel} = \frac{r_{nom}}{n}$. Die Zinsen nach der ersten Periode sind $S_0 \cdot \frac{r}{n} = S_0 \cdot r_{rel} = S_0 \cdot \frac{r_{nom}}{n}$. Das Endkapital nach t Jahren ist:

$$S_t = S_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = S_0\left(1 + \frac{r_{nom}}{n}\right)^{nt} = S_0\,(1 + r_{rel})^{nt}$$

Die effektive jährliche Zinsrate R ist dann:

$$R = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1 = \left(1 + \frac{r_{nom}}{n}\right)^n - 1 = (1 + r_{rel})^n - 1$$

Effektive und konforme Zinsrate

Eine unterjährige Zinsrate r_p und eine jährliche Zinsrate heißen konform, wenn sie bei gleichem Anfangskapital zu gleichem Endkapital führen, d.h. $(1 + r_p)^n = 1 + r$ gilt. Man nennt dann $r = r_{eff}$ die effektive Zinsrate und $r_p = r_{kon}$ die konforme unterjährige Zinsrate.

Stetige Verzinsung

Definition

Man spricht von stetiger Verzinsung, wenn man die Anzahl der Zinsperioden n pro Jahr gegen unendlich gehen lässt.

Zinsen, Endkapital, Wachstum und effektiver Zinssatz bei stetiger Verzinsung

Das Anfangskapital S_0 werde mit einer jährlichen Zinsrate r stetig verzinst. Die Zinsen nach dem ersten Jahr sind dann $S_0 e^r$. Das Endkapital nach t Jahren ist

$$S(t) = S_0 e^{rt}$$

Diese Formel lässt sich nach S_0, r, p bzw. t auflösen:

$S_0 = \dfrac{S(t)}{e^{rt}} = S(t)e^{-rt}$ Berechnung des Anfangswertes (Barwertes)

$r = \dfrac{\ln S(t) - \ln S_0}{t} = \dfrac{1}{t} \ln \dfrac{S_t}{S_0}$ Berechnung der Zinsrate

$t = \dfrac{\ln S(t) - \ln S_0}{r} = \dfrac{1}{r} \ln \dfrac{S(t)}{S_0}$ Berechnung der Laufzeit

Bei stetiger Verzinsung wächst das Kapital mit der konstanten relativen Wachstumsrate $S'(t)/S(t) = r$. Das Kapital wächst jedes Jahr um den konstanten Faktor e^r, d.h. $S(t+1) = S(t)e^r$. Die Verdopplungszeit ist $t = \ln 2/r$, entsprechend ist das Kapital nach der Zeit $t = \ln q/r$ auf das q-fache angewachsen.
Die effektive Zinsrate $R = r_{eff}$ ergibt bei gleichem Anfangskapital und jährlicher diskreter Verzinsung das gleiche Endkapital wie stetige Verzinsung mit der jährlichen Rate $r = r_s$:

$$r_{eff} = e^{r_s} - 1 \iff r_s = \ln(1 + r_{eff})$$

Barwert

Falls der Zinssatz $p\%$ pro Jahr und $r = p/100$, so hat ein Betrag K, der in t Jahren zur Zahlung fällig ist, bei exponentieller Verzinsung den Barwert oder gegenwärtigen diskontierten Wert:

$K(1+r)^{-t}$ bei jährlicher Verzinsung Ke^{-rt} bei stetiger Verzinsung

Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik bei Zinseszinsen

Um eine Zahlung S_0 – bezogen auf ihren Fälligkeits- bzw. Wertstellungstermin – in eine t Zinsperioden entfernte Zukunft zu transferieren, muss man S_0 um t Zinsperioden aufzinsen (bzw. abzinsen), d.h. mit dem entsprechenden Aufzinsungsfaktor $q^t = (1+r)^t$ bzw. Abzinsungsfaktor $q^{-t} = (1+r)^{-t}$ multiplizieren, um die **Zeitwerte** S_t bzw. S_{-t} zu erhalten.

Umweg-Satz der exponentiellen Verzinsung

Der unter Verwendung der Zinseszinsmethode ermittelte Zeitwert S_t (im Zeitpunkt t) einer Zahlung S_0 (im Zeitpunkt 0) hängt außer von der Zinsrate r nur von der zeitlichen Differenz t zwischen den Wertstellungsterminen von S_t und S_0 ab, nicht von der Anzahl, Art oder Reihenfolge möglicher Auf-/Abzinsungsschritte, mit denen der Endtermin schließlich erreicht wird.

Äquivalenz zweier Zahlungen

Zwei Zahlungen S_0 (fällig im Zeitpunkt 0) und S_t (fällig im Abstand von t Zeitperioden bezogen auf den Zeitpunkt 0) heißen (unter Anwendung der exponentiellen Verzinsung, d.h. des Zinseszins-Prinzips, und dem Zinssatz r) äquivalent, wenn zwischen ihnen die Beziehung

$$S_t = S_0(1 + r)^t = S_0 q^t$$

besteht. Ist t positiv (negativ), so liegt S_t zeitlich um t Zinsperioden später (früher) als S_0.

Sind zwei zu verschiedenen Zeitpunkten fällige Zahlungen äquivalent bezüglich eines Zeitpunktes, so auch in Bezug auf jeden anderen Zeitpunkt.

Zwei (oder mehr) zu unterschiedlichen Zeitpunkten fällige Zahlungen dürfen nur dann zu einem (zeitbezogenen) Gesamtwert (additiv und/oder subtraktiv) zusammengefasst werden, wenn sie zuvor auf einen gemeinsamen Bezugstermin auf-/abgezinst wurden.

Ist eine Zahlungsreihe (insbesondere eine Rente) in einem Zeitpunkt zu einem Gesamtwert S zusammengefasst worden, so erhält man jeden Zeitwert derselben Zahlungsreihe (Rente) durch einmaliges Auf-/Abzinsen des bereits ermittelten Gesamtwertes S.

Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik

Zwei Zahlungsreihen A, B dürfen nur dann verglichen, addiert oder subtrahiert werden, wenn zuvor sämtliche vorkommenden Zahlungen (mit Hilfe einer zuvor definierten Verzinsungsmethode) auf einen und denselben Stichtag auf- oder abgezinst wurden. Der dabei verwendete Zinssatz heißt **Kalkulationszinssatz** oder (im Falle der Äquivalenz) **Effektivzinssatz** (auch Rendite (bei Wertpapieren) oder interner Zinssatz (bei Investitionen)). Bei Anwendung der reinen Zinseszinsrechnung (d.h. Anfang und Ende des betrachteten Zeitintervalls sind Zinszuschlagstermine) gilt:

1) Der Zeitwert S_t (zu einem gewählten Stichtag) einer Zahlungsreihe $S_1, S_2, \ldots, S_x$ darf bei exponentieller Verzinsung durch getrenntes Auf-/Abzinsen jeder Einzelzahlung mit anschließender Saldobildung ermittelt werden:

$$S_t = S_1 q^{t_1} + S_2 q^{t_2} + \ldots + S_x q^{t_x}$$

Dabei sind $t_1, \ldots, t_x$ die in Zeitperioden gemessenen Abstände der Zahlungen $S_1, \ldots, S_x$ vom Stichtag t.

2) Beim Auf-/Abzinsen einer Zahlung (bzw. eines zuvor nach 1.) ermittelten Zeitwertes) auf einen gewählten Stichtag dürfen beliebige Verzinsungsstufen oder -umwege gemacht werden:

$$S_t = S_0 q^t = S_0 \cdot q^{t_1} \cdot q^{t_2} \cdot \ldots \cdot q^{t_x} = S_0 \cdot q^{t_1+t_2+\ldots+t_x} \qquad (t = t_1 + t_2 + \ldots + t_x)$$

3) Sind zwei Zahlungsreihen A, B bezüglich eines Stichtages (= Zinszuschlagstermin) äquivalent, so auch bezüglich jedes beliebigen anderen Stichtages, d.h. der Stichtag ist beliebig wählbar.

4) Derjenige nachschüssige Jahreszinssatz p, für den unter Beachtung der jeweils anzuwendenden Verzinsungsmethode die Äquivalenzgleichung $A = B$ wahr wird, heißt **effektiver Jahreszins** (Rendite, interner Zinssatz).

Zeitzentrum einer Zahlungsreihe bei exponentieller Verzinsung

Gegeben sei eine Zahlungsreihe mit den Einzelzahlungen $S_1, S_2, \ldots, S_m$, die zu genau definierten Zeitpunkten fällig sind. Sämtliche Zahlungen sind äquivalent (d.h. ohne Zinsvor- oder -nachteile) ersetzbar durch die einmalige Zahlung $S = S_1 + \ldots + S_m$ des nominellen Gesamtbetrages. Der Fälligkeitstag (Zeitzentrum der Zahlungsreihe, mittlerer Zahlungstermin) ist:

$$t = \frac{\ln(S_1 q^{t_1} + S_2 q^{t_2} + \ldots + S_m q^{t_m}) - \ln(S_1 + S_2 + \ldots + S_m)}{\ln q}$$

Dabei messen t bzw. $t_1, \ldots, t_m$ den Zeitabstand der Zahlung vom späteren Stichtag.

8

Inflation

Definition

Die Inflationsrate i_{infl} ist definiert als derjenige Prozentsatz, der in einer Volkswirtschaft die Veränderung des allgemeinen Preisniveaus gegenüber dem Vorjahr angibt. Der Inflationsfaktor ist $1 + i_{infl}$.