MEHR ERFAHREN

ABITUR-TRAINING

Gymnasium

Analytische Geometrie

Bayern

STARK

Inhalt

Autor: Eberhard Endres

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses Buch bietet Ihnen eine umfassende Zusammenstellung der Grundkompetenzen, die zum Lösen geometrischer Fragestellungen in der Oberstufe erforderlich sind, und unterstützt Sie damit bei der Vorbereitung auf Klausuren und auf die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik.

Die einzelnen Kapitel sind so aufgebaut, dass die Lerninhalte jeweils eines Themenbereichs übersichtlich hergeleitet und dargestellt sowie mit **Beispielen** erläutert werden. Wichtige **Begriffe** und **Definitionen** sind dabei in farbig getönten Feldern, **Regeln** und **Merksätze** in farbig umrandeten Kästen hervorgehoben. Jeder Abschnitt schließt mit **Übungsaufgaben** zur Einübung des Gelernten sowie zur eigenen Erfolgskontrolle.

Zu den wichtigsten Themenbereichen gibt es **Lernvideos**, in denen die typischen Beispiele Schritt für Schritt erklärt werden. An den entsprechenden Stellen im Buch befindet sich ein QR-Code, den Sie mithilfe Ihres Smartphones oder Tablets scannen können – Sie gelangen so schnell und einfach zum zugehörigen Lernvideo.

Zunächst werden in den ersten drei Kapiteln elementare Grundsteine gelegt, die zur Beschreibung und Untersuchung von **Geraden** und **Ebenen** benötigt werden. In weiteren Kapiteln werden vektorgeometrischen Hilfsmittel eingeführt, mit denen die **Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten** untersucht sowie **Abstands- und Winkelprobleme** behandelt werden können. Nach **Flächen- und Volumenberechnungen** werden schließlich noch **Kreise** und **Kugeln** angesprochen. Die bis dahin erworbenen Kenntnisse werden anschließend eingesetzt, um **Anwendungsaufgaben** zu lösen. Im letzten Kapitel finden Sie eine bunte Sammlung von Aufgaben, die Sie zur eigenen Erfolgskontrolle und Wiederholung nutzen können.

Prinzipiell kann **jedes Kapitel separat** bearbeitet werden, jedoch bauen die meisten davon auf vorhergehenden Einheiten auf, sodass sich auch die Bearbeitung des gesamten Buches anbietet. Es steht Ihnen frei, über die Geschwindigkeit und Schwerpunkte der Bearbeitung selbst zu entscheiden.

Die **Lösungswege für alle Aufgaben** sind im Lösungsteil ausführlich dargestellt, um eine gewissenhafte Kontrolle zu ermöglichen und somit den Lernerfolg zu unterstützen. Die mit einem Stern **(∗)** gekennzeichneten Aufgaben sind etwas anspruchsvoller und regen in besonderer Weise zum Nachdenken an; Sie können diese beim ersten Durcharbeiten auch überspringen.

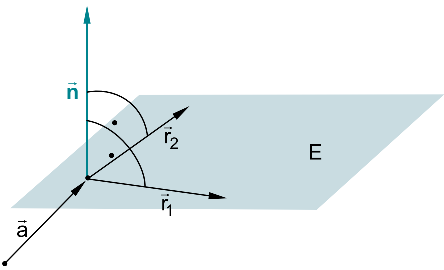
Viel Erfolg beim Abitur-Training Analytische Geometrie wünscht Ihnen

Eberhard Endres

Eberhard Endres

6.1 Der Normalenvektor

Betrachtet wird eine Ebene, die durch den Stützvektor $\vec{a}$ und die beiden (linear unabhängigen) Spannvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ bestimmt ist. In jedem Punkt dieser Ebene kann man einen Vektor ansetzen, der auf den beiden Spannvektoren (und somit auf der ganzen Ebene) senkrecht steht; man nennt einen solchen Vektor **Normalenvektor $\vec{n}$** der Ebene. Je zwei dieser Vektoren sind linear abhängig – d. h. ein Vielfaches voneinander –, da die Richtung einer Geraden im Raum, die zu einer Ebene orthogonal ist, eindeutig festgelegt ist.



Für spätere Berechnungen ist es wichtig, einen gewissermaßen normierten Normalenvektor zu finden, d. h. einen Normalenvektor mit Länge 1. Hat man einen beliebigen Normalenvektor $\vec{n}$ gefunden, so erhält man den zugehörigen **Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_0$**, indem man ihn durch seinen Betrag dividiert:

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \text{ mit } |\vec{n}_0| = \left|\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \frac{|\vec{n}|}{|\vec{n}|} = 1$$

Definition

- Eine zu einer Ebene orthogonale Gerade heißt **Normale**.
- Ein Richtungsvektor dieser Geraden wird **Normalenvektor** der Ebene genannt.
- Ein Normalenvektor einer Ebene steht orthogonal auf den Spannvektoren der Ebene.
- Ein Normalenvektor der Länge 1 wird als **Normaleneinheitsvektor** bezeichnet.

Beispiel

Gegeben ist die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie einen Normalenvektor der Ebene. Geben Sie auch den zugehörigen Normaleneinheitsvektor an.

Lösung:

Gesucht ist ein Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, der orthogonal auf beiden Spannvektoren der Ebene steht.

Für diesen Normalenvektor $\vec{n}$ muss also gelten:

$$\vec{n} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n_1 - 2n_2 + 3n_3 = 0 \text{ und}$$

$$\vec{n} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2n_1 + n_2 + 6n_3 = 0$$

Dies führt auf das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & n_1 - 2n_2 + 3n_3 = 0 \\ \text{II} & -2n_1 + n_2 + 6n_3 = 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{I} & n_1 - 2n_2 + 3n_3 = 0 \\ \text{III} = 2\cdot\text{I}+\text{II} & -3n_2 + 12n_3 = 0 \end{array}$$

In Gleichung III lässt sich z. B. n_3 beliebig wählen und daraus dann n_2 bestimmen. Wählt man $n_3 = 1$, ergibt sich:

$$-3n_2 + 12\cdot 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3n_2 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad n_2 = 4$$

Setzt man dies in die erste Gleichung ein, dann folgt:

$$n_1 - 2\cdot 4 + 3\cdot 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n_1 = 5$$

Ein möglicher Normalenvektor lautet: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Für die Berechnung des zugehörigen Normaleneinheitsvektors $\vec{n}_0$ benötigt man den Betrag von $\vec{n}$:

$$|\vec{n}| = \sqrt{5^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{42} \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{\sqrt{42}} = \frac{1}{\sqrt{42}} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgaben

63. Bestimmen Sie einen Normalenvektor der Ebene, die durch die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

64. Bestimmen Sie einen Normaleneinheitsvektor zu der Ebene E durch die Punkte $A(3\,|\,1\,|\,0)$, $B(4\,|\,-2\,|\,-3)$ und $C(1\,|\,2\,|\,1)$.

65. Begründen Sie, dass alle Normalenvektoren einer Ebene linear abhängig sind.

66. Eine Ebene besitzt den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und geht durch den Punkt $P(5\,|\,1\,|\,2)$. Geben Sie eine Gleichung der Ebene in Parameterform an.

6.2 Vektorprodukt

In diesem Kapitel wird nun die Bestimmung eines Normalenvektors zu zwei Vektoren allgemein durchgeführt. Ziel ist die Aufstellung einer Formel, die zu zwei Vektoren stets einen Normalenvektor liefert, damit man das jeweilige Lösen des zugrunde liegenden Gleichungssystems einsparen kann.

Betrachtet werden die zwei Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$.

Gesucht ist ein Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$, also ein Vektor, der orthogonal auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht. Dafür muss gelten:

$$\vec{a}\circ\vec{n}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad a_1n_1+a_2n_2+a_3n_3=0 \text{ und}$$

$$\vec{b}\circ\vec{n}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad b_1n_1+b_2n_2+b_3n_3=0$$

Das dazugehörige lineare Gleichungssystem wird gelöst:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & a_1n_1+a_2n_2+a_3n_3=0 \\ \text{II} & b_1n_1+b_2n_2+b_3n_3=0 \end{array} \quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{lrrr} \text{I} & a_1n_1+ & a_2n_2+ & a_3n_3=0 \\ \text{III}=b_1\cdot\text{I}-a_1\cdot\text{II} & & (a_2b_1-a_1b_2)n_2+ & (a_3b_1-a_1b_3)n_3=0 \end{array}$$

Gleichung III lässt sich umformen zu:

$$\begin{aligned} & (a_3b_1-a_1b_3)n_3=-(a_2b_1-a_1b_2)n_2 \\ \Leftrightarrow\quad & (a_3b_1-a_1b_3)n_3=(-a_2b_1+a_1b_2)n_2 \\ \Leftrightarrow\quad & (a_3b_1-a_1b_3)n_3=(a_1b_2-a_2b_1)n_2 \end{aligned}$$

Da drei Unbekannte zu bestimmen sind, aber nur zwei Gleichungen vorliegen, ist eine Unbekannte, z. B. n_3, frei wählbar. Um ein möglichst einfaches Ergebnis zu erreichen, setzt man n_3 so, dass sich die Klammern in der umgeformten Gleichung III kreuzweise wegkürzen; mit $n_3=a_1b_2-a_2b_1$ erhält man:

$$(a_3b_1-a_1b_3)\cdot(a_1b_2-a_2b_1)=(a_1b_2-a_2b_1)n_2 \quad\Rightarrow\quad n_2=a_3b_1-a_1b_3$$

Setzt man diese Werte von n_3 und n_2 noch in Gleichung I ein, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} & a_1n_1+a_2\cdot(a_3b_1-a_1b_3)+a_3\cdot(a_1b_2-a_2b_1)=0 \\ \Leftrightarrow\quad & a_1n_1+a_2a_3b_1-a_1a_2b_3+a_1a_3b_2-a_2a_3b_1=0 \\ \Leftrightarrow\quad & a_1n_1=a_2a_1b_3-a_3a_1b_2 \\ \Leftrightarrow\quad & n_1=a_2b_3-a_3b_2 \end{aligned}$$

Ein Normalenvektor zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ lautet somit $\vec{n}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$.

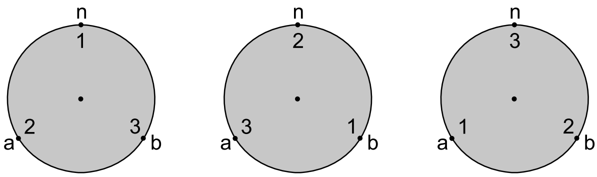
Beispiel

Geben Sie einen Normalenvektor zu den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ an.

Lösung:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 - (-3)\cdot(-2) \\ -3\cdot 4 - 2\cdot 5 \\ 2\cdot(-2) - 1\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-6 \\ -12-10 \\ -4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -22 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Die Formel zur Bestimmung des Normalenvektors kann man sich mit folgendem Schema recht einfach merken:



Man notiert die Vektornamen n-a-b außerhalb einer drehbar gedachten Kreisscheibe und deren Indizes 1-2-3 auf der Kreisscheibe jeweils entgegen dem Uhrzeigersinn.
Um z. B. n_2 zu bestimmen, dreht man die 2 unter n (zweite Darstellung) und liest a_3 und b_1 ab. Das Produkt dieser beiden Variablen stellt den ersten Teil der Differenz dar. Den zweiten Teil erhält man durch Vertauschen der Indizes. Somit kann man n_2 bilden: $n_2 = a_3b_1 - a_1b_3$
Dieses Verfahren wird auch zyklische Vertauschung der Indizes genannt. Der dabei gebildete Vektor $\vec{n}$ heißt Kreuz- oder Vektorprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Definition

Das **Vektorprodukt** oder **Kreuzprodukt** zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist definiert als:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ steht orthogonal auf den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Beachten Sie, dass beim Vektorprodukt im Gegensatz zum Skalarprodukt ein Vektor – und keine Zahl – entsteht.

Aufgaben

67. Bestimmen Sie das Vektorprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

68. Bestimmen Sie einen Vektor, der orthogonal auf den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ steht.

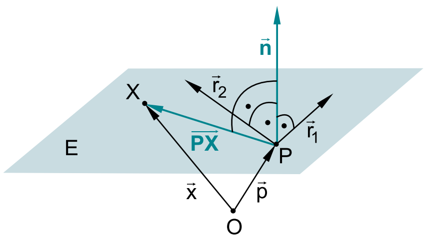
69. Bestimmen Sie einen Normalenvektor der Ebene

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

6.3 Normalenform der Ebene

Nachdem im letzten Abschnitt ein einfaches Verfahren zur Bestimmung eines Normalenvektors erarbeitet wurde, lernen Sie nun, wie man eine Ebene nur mithilfe des Normalenvektors und eines Punktes beschreiben kann. Diese Darstellung von Ebenen ist bei vielen Fragestellungen vorteilhaft.

Der Normalenvektor $\vec{n}$ einer Ebene wurde so definiert, dass er auf beiden Spannvektoren, also auf der ganzen Ebene, senkrecht steht.



Ist nun ein Punkt P der Ebene bekannt, so liegt für jeden anderen Punkt X der Ebene der Vektor $\overrightarrow{PX}$ ebenfalls in der Ebene. Somit steht $\vec{n}$ orthogonal auf $\overrightarrow{PX}$, das Skalarprodukt zwischen diesen Vektoren ist daher null:

$$\overrightarrow{PX} \circ \vec{n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0$$

Da diese Eigenschaft genau für alle Punkte X in der Ebene gilt, stellt diese Gleichung auch eine Möglichkeit dar, die Ebene eindeutig zu definieren. Eine Ebene ist somit bereits durch die Angabe eines Normalenvektors $\vec{n}$ und eines Punktes P der Ebene eindeutig bestimmt.

Regel

Normalenform der Ebene
Eine Ebene, die den Punkt P enthält und den Normalenvektor $\vec{n}$ besitzt, erfüllt die Gleichung E: $(\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0$.

Beispiele

1. Wandeln Sie die Ebene mit der Parametergleichung

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

in die Normalenform um.

Lösung:
Zunächst wird ein Normalenvektor der Ebene bestimmt:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6-1 \\ -2+3 \\ 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Mit dem Punkt P(–3 | –1 | –1) der Ebene erhält man als Ebenengleichung:

$$E\colon \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

2. Wandeln Sie die Ebene mit der Normalenform E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$ in die Parameterform um.

Lösung:
Für die Parameterform werden zwei zu $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ orthogonale Spannvektoren $\vec{r}$ und $\vec{s}$ von E gesucht.
Für diese muss also gelten:

$$\vec{n} \circ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2r_1 - r_2 - 2r_3 = 0$$

Wählt man r_1 und r_3 beliebig, z. B. $r_1 = 1$ und $r_3 = 0$, erhält man aus dieser Gleichung:

$$2r_1 - r_2 - 2r_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_2 = 2r_1 - 2r_3 = 2$$

Ein möglicher Spannvektor lautet daher $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Entsprechend erhält man einen möglichen zweiten Spannvektor aus:

$$\vec{n} \circ \vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2s_1 - s_2 - 2s_3 = 0,$$

indem man z. B. $s_1 = 0$ und $s_3 = 1$ setzt. Hiermit ergibt sich dann:

$$s_2 = 2s_1 - 2s_3 = -2 \quad \text{und} \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Punkt P(3 | 1 | 4) liegt in der Ebene, daher eignet sich sein Ortsvektor als Stützvektor und man erhält die Ebenengleichung in Parameterform:

$$E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgaben

70. Wandeln Sie die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ in Normalenform um.

71. Geben Sie die Ebene E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$ in Parameterform an.

72. Prüfen Sie, welche der Punkte A(2|−4|1), B(3|1|2), C(0|1|2), D(−2|−2|5) auf der Ebene E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$ liegen.

73. Bestimmen Sie die Ebene durch die Punkte A(2|−4|1), B(3|1|2) und C(0|1|2) in Parameter- und in Normalenform.

6.4 Koordinatenform der Ebene

Die Normalenform der Ebene enthält ein Skalarprodukt, das weiter umgeformt werden kann:

$$
\begin{aligned}
\text{E: } (\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{E: } \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x_1 - p_1) \cdot n_1 + (x_2 - p_2) \cdot n_2 + (x_3 - p_3) \cdot n_3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 = p_1 \cdot n_1 + p_2 \cdot n_2 + p_3 \cdot n_3
\end{aligned}
$$

Da für eine Ebene in Normalenform der Punkt P und der Normalenvektor $\vec{n}$ gegeben sind, sind die Koordinaten der Vektoren $\vec{p}$ und $\vec{n}$ bekannt und damit ist der rechte Teil der Gleichung $p_1 \cdot n_1 + p_2 \cdot n_2 + p_3 \cdot n_3$ eine Konstante.
Somit hat man durch dieses Ausmultiplizieren des Skalarprodukts eine weitere Darstellungsmöglichkeit einer Ebene gewonnen. Diese Darstellungsform nennt man Koordinatenform.

Regel

Koordinatenform einer Ebene
Eine Ebene mit dem Normalenvektor $\vec{n}$, die den Punkt P enthält, kann auch durch die **Koordinatenform** beschrieben werden:
E: $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = c$, wobei $c = p_1 \cdot n_1 + p_2 \cdot n_2 + p_3 \cdot n_3$ ist.

Ist eine Ebene in Koordinatenform gegeben, so kann man einen Normalenvektor dieser Ebene direkt an den Koeffizienten der x_i ablesen.

Beispiel

Geben Sie einen Normalenvektor der Ebene E durch die Punkte A(3|2|−4), B(1|−2|−1) und C(2|1|−2) an und bestimmen Sie ihre Koordinatenform.

Lösung:

Variante 1: Als Spannvektoren der Ebene kann man $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ verwenden. Hieraus lässt sich über das Vektorprodukt ein Normalenvektor bestimmen:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -8+3 \\ -3+4 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung der Ebene E in Koordinatenform lautet dann

E: $-5x_1 + x_2 - 2x_3 = c$,

wobei sich c mithilfe der Koordinaten des Punktes A bestimmen lässt:

$c = 3 \cdot (-5) + 2 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) = -5$

Die Ebenengleichung lautet also:

E: $-5x_1 + x_2 - 2x_3 = -5$

Variante 2: Wenn eine Ebene durch drei Punkte gegeben ist, dann lässt sich die Koordinatenform der Ebene entweder – wie in Variante 1 angegeben – über die Bestimmung eines Normalenvektors oder alternativ auch über drei „Punktproben" finden. Dabei werden die Koordinaten der gegebenen Punkte in die allgemeine Koordinatenform eingesetzt und man erhält ein lineares Gleichungssystem.

Die allgemeine Ebenengleichung in Koordinatenform lautet:

E: $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = c$

Punktprobe mit A: $n_1 \cdot 3 + n_2 \cdot 2 + n_3 \cdot (-4) = c$

Punktprobe mit B: $n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot (-2) + n_3 \cdot (-1) = c$

Punktprobe mit C: $n_1 \cdot 2 + n_2 \cdot 1 + n_3 \cdot (-2) = c$

Die Werte von n_1, n_2 und n_3 und c bestimmt man durch Lösen des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{llcll} \text{I} & 3n_1 + 2n_2 - 4n_3 = c & & \text{I} & 3n_1 + 2n_2 - 4n_3 = c \\ \text{II} & n_1 - 2n_2 - n_3 = c & \Leftrightarrow & \text{IV} = \text{I} - 3 \cdot \text{II} & 8n_2 - n_3 = -2c \\ \text{III} & 2n_1 + n_2 - 2n_3 = c & & \text{V} = 2 \cdot \text{II} - \text{III} & -5n_2 = c \end{array}$$

Da das Gleichungssystem insgesamt vier Unbekannte, aber nur drei Gleichungen besitzt, kann man eine Variable frei wählen. Setzt man z. B. $c = 5$ fest, dann lässt sich n_2 anhand Gleichung V bestimmen:

$-5n_2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad n_2 = -1$

Eingesetzt in Gleichung IV ergibt sich:

$8 \cdot (-1) - n_3 = -2 \cdot 5 \quad \Leftrightarrow \quad -n_3 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad n_3 = 2$

Aus Gleichung I folgt schließlich:

$3n_1 + 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 3n_1 = 15 \quad \Leftrightarrow \quad n_1 = 5$

Ein Normalenvektor der Ebene E lautet somit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, und die Koordinatengleichung der Ebene E ergibt sich zu:

$5x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$

Wegen der freien Wählbarkeit eines der drei Parameter besitzt das Gleichungssystem nicht nur die triviale Lösung; die geprüften Vektoren sind linear abhängig.

Dieselbe Prüfung wird für die Spannvektoren $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ durchgeführt:

$$r\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{ll}\mathrm{I} & -r+2s-2t=0\\ \mathrm{II} & s+2t=0\\ \mathrm{III} & r-4s+t=0\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{lr}\mathrm{I} & -r+2s-2t=0\\ \mathrm{II} & s+2t=0\\ \mathrm{IV}=\mathrm{I}+\mathrm{III} & -2s-t=0\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{lr}\mathrm{I} & -r+2s-2t=0\\ \mathrm{II} & s+2t=0\\ \mathrm{V}=2\cdot\mathrm{II}+\mathrm{IV} & 3t=0\end{array}$$

Hier besitzt das Gleichungssystem nur die triviale Lösung $(t=s=r=0)$; die geprüften Vektoren sind linear unabhängig.

Der Spannvektor $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ der Ebene E_1 „ragt“ also aus der Ebene E_2 heraus, und die beiden Ebenen sind somit **nicht identisch**.

63. Aus den Bedingungen $\vec{a}\circ\vec{n}=0$ und $\vec{b}\circ\vec{n}=0$ ergibt sich:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=0 \text{ und } \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=0$$

Dies führt auf das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll}\mathrm{I} & n_1 \quad +5n_3=0\\ \mathrm{II} & -n_1+3n_2+n_3=0\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll}\mathrm{I} & n_1 \quad +5n_3=0\\ \mathrm{III}=\mathrm{II}+\mathrm{I} & 3n_2+6n_3=0\end{array}$$

Die Koordinate n_3 ist beliebig wählbar, z. B. $n_3=1$.

Aus Gleichung III erhält man damit

$3n_2+6\cdot 1=0 \Leftrightarrow 3n_2=-6 \Leftrightarrow n_2=-2$

und aus Gleichung I folgt:

$n_1+5\cdot 1=0 \Leftrightarrow n_1=-5$

Ein Normalenvektor der Ebene lautet also $\vec{n}=\begin{pmatrix}-5\\-2\\1\end{pmatrix}$.

64. Die Ebene E besitzt die Spannvektoren $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-3\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$.

Somit ergibt sich aus den Bedingungen $\overrightarrow{AB}\circ\vec{n}=0$ und $\overrightarrow{AC}\circ\vec{n}=0$ das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll}\mathrm{I} & n_1-3n_2-3n_3=0\\ \mathrm{II} & -2n_1+n_2+n_3=0\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll}\mathrm{I} & n_1-3n_2-3n_3=0\\ \mathrm{III}=2\cdot\mathrm{I}+\mathrm{II} & -5n_2-5n_3=0\end{array}$$

Wählt man $n_3 = 1$, folgt aus Gleichung III: $-5n_2 - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n_2 = -1$
Eingesetzt in die erste Zeile erhält man: $n_1 + 3 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n_1 = 0$

Ein Normalenvektor der Ebene lautet somit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und seine Länge beträgt:

$$|\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Ein Normaleneinheitsvektor der Ebene ist damit $\mathbf{\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

65. Ein Normalenvektor einer Ebene muss orthogonal zu den beiden Spannvektoren der Ebene stehen. Dadurch ist seine Richtung vorgegeben und er ist bis auf Länge und Orientierung eindeutig bestimmt. Somit sind alle Normalenvektoren einer Ebene zueinander parallel, also linear abhängig.

66. Man bestimmt zunächst zwei Spannvektoren der Ebene; diese müssen orthogonal zu $\vec{n}$ stehen und linear unabhängig sein. Die erste Bedingung lautet:

$$\vec{v} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 + 3v_2 - 2v_3 = 0$$

Um zwei linear unabhängige Vektoren zu erhalten, wählt man je zwei Koordinaten so, dass sie keine Vielfachen voneinander sind.

Mit $v_2 = 1$ und $v_3 = 1$ ergibt sich z. B. $v_1 = -3v_2 + 2v_3 = -1$, also: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Mit $v_2 = 1$ und $v_3 = 0$ ergibt sich $v_1 = -3v_2 = -3$ und somit: $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zusammen mit dem Ortsvektor von P als Stützvektor der Ebene erhält man als Gleichung für die Ebene:

$$\mathbf{E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

67. a) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \mathbf{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

b) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \mathbf{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

c) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 6 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 4 - 0 \cdot 6 \\ 0 \cdot 1 - 0 \cdot 4 \end{pmatrix} = \mathbf{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

68. $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot(-1)-5\cdot 1\\5\cdot(-1)-1\cdot(-1)\\1\cdot 1-3\cdot(-1)\end{pmatrix}=\boldsymbol{\begin{pmatrix}-8\\-4\\4\end{pmatrix}}$

69. Ein Normalenvektor der Ebene E muss senkrecht auf beiden Spannvektoren stehen:

$\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-3)-(-2)\cdot(-2)\\-2\cdot 1-3\cdot(-3)\\3\cdot(-2)-1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\7\\-7\end{pmatrix}$

Jeder Normalenvektor der Ebene ist also ein Vielfaches von $\boldsymbol{\vec{n}=\begin{pmatrix}-7\\7\\-7\end{pmatrix}}$.

70. Zunächst wird ein Normalenvektor der Ebene bestimmt:

$\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\5\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23\\5\\16\end{pmatrix}$

Mit dem Stützpunkt $P(1\,|\,2\,|\,-5)$ erhält man als Normalenform der Ebene:

$\boldsymbol{E:\ \left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}23\\5\\16\end{pmatrix}=0}$

71. Als Stützpunkt der Ebene kann man $P(1\,|\,4\,|\,7)$ verwenden. Die Spannvektoren der Ebene müssen orthogonal zu $\vec{n}$ stehen, also $\vec{n}\circ\vec{v}=0$ erfüllen:

$\vec{n}\circ\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix}\circ\vec{v}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 3v_1+v_2-4v_3=0$

Zwei geeignete Vektoren sind z. B. $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$.

Damit lautet eine mögliche Parameterform der Ebene:

$\boldsymbol{E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}}$

72. Alle Punkte, die in der Ebene liegen, müssen ihre Gleichung erfüllen.

Punktprobe mit A:

$\left(\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}4\\-6\\-2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 20-12-8=0 \quad\Leftrightarrow\quad 0=0$

A liegt in der Ebene E.

Punktprobe mit B:

$\left(\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}5\\-1\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 25-2-4=0 \quad\Leftrightarrow\quad 19=0$

B liegt **nicht** in der Ebene E.

Punktprobe mit C:

$$\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 10-2-4=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4=0$$

C liegt **nicht** in der Ebene E.

Punktprobe mit D:

$$\left(\begin{pmatrix}-2\\-2\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}0\\-4\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad -8+8=0 \quad\Leftrightarrow\quad 0=0$$

D liegt in der Ebene E.

73. Für die Parameterform von E wählt man z. B. A als Stützpunkt und die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ als Spannvektoren:

$$\mathbf{E:}\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$$

Ein Normalenvektor von E ergibt sich durch:

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\\15\end{pmatrix}$$

Damit erhält man als Normalenform der Ebene:

$$\mathbf{E:}\ \left(\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}0\\-3\\15\end{pmatrix}=0$$

74. a) Bestimmung eines Normalenvektors von E:

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\6\\-3\end{pmatrix}$$

Verwendet man $\frac{1}{3}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$ als Normalenvektor der Ebene (um mit kleineren Zahlen rechnen zu können), lautet die Koordinatenform der Ebene:

E: $3x_1+2x_2-x_3=c$

Um c zu bestimmen, setzt man den Stützpunkt (–5 | –2 | –1) der Ebene in diese Gleichung ein:

$$3\cdot(-5)+2\cdot(-2)-(-1)=c \quad\Leftrightarrow\quad c=-15-4+1=-18$$

Die Koordinatenform der Ebene lautet also:

E: $3x_1+2x_2-x_3=-18$

b) Man multipliziert das Skalarprodukt in der Normalenform aus:

$$\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}-1\\-2\\4\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}5\\-2\\4\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x_1+1)\cdot5+(x_2+2)\cdot(-2)+(x_3-4)\cdot4=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$5x_1+5-2x_2-4+4x_3-16=0 \quad\Leftrightarrow\quad 5x_1-2x_2+4x_3=15$$

Die Koordinatenform der Ebene lautet **E: $5x_1-2x_2+4x_3=15$**.