2022

Abitur

Original-Prüf
mit Lösunger

MEHR
ERFAHREN

Gymnasium NRW

Mathematik GK

+ *Übungsaufgaben*
+ *Zusätzliche Aufgaben als PD*
+ *Lernvideos zur GTR/CAS-Nutz*

ActiveBook
Interaktives
Training

Original-Prüfungsaufgaben
2021 zum Download

STARK

Inhalt

Abiturprüfung 2019*

Abiturprüfung 2020*

Abiturprüfung 2021

Das Corona-Virus hat auch im vergangenen Schuljahr die Prüfungsabläufe durcheinandergebracht und manches verzögert. Daher sind die Aufgaben und Lösungen zur Prüfung 2021 in diesem Jahr nicht im Buch abgedruckt, sondern erscheinen in digitaler Form. Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2021 zur Veröffentlichung freigegeben sind, können Sie sie als PDF auf der Plattform MyStark herunterladen.

* Da die Aufgabe B4 in den Jahrgängen 2017 bis 2020 für das Abitur seit 2021 nicht mehr prüfungsrelevant ist, wird diese nicht mehr abgedruckt.

Bei MyStark finden Sie:
- **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil A des Abiturs
- **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
- **Jahrgang 2021**, sobald dieser zum Download bereit steht
- alle **Original-Prüfungsaufgaben** der Jahre **2017 bis 2021** mit Lösungen, die nicht im Buch abgedruckt sind

Ausführliche Infos inkl. Zugangscode zu MyStark finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im Interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Autorinnen und Autoren:

Georg Breitenfeld

Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung – Prüfungsteil A: b, d; Prüfungsteil B: B4;
Lösungen zur Abiturprüfung 2017 – Prüfungsteil A: d; Prüfungsteil B: B1 (GTR), B5 (GTR/CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2018 – Prüfungsteil A: b, d; Prüfungsteil B: B1 (GTR), B5 (GTR/CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2019 – Prüfungsteil A: a, c; Prüfungsteil B: B1 (GTR), B5 (GTR/CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2020 – Prüfungsteil B: B2 (CAS), B5 (GTR/CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2021;
Download: 2017 – B1 (CAS); 2018 – B1 (CAS); 2019 – B1 (CAS); 2020 – B2 (GTR)

Herbert Kompernaß

Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung – Prüfungsteil A: a, c; Prüfungsteil B: B1, B2, B3;
Lösungen zur Abiturprüfung 2017 – Prüfungsteil A: a, b, c; Prüfungsteil B: B2 (CAS), B3 (GTR/CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2018 – Prüfungsteil A: a, c; Prüfungsteil B: B2 (GTR/CAS), B3 (GTR/CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2019 – Prüfungsteil A: b, d; Prüfungsteil B: B2 (CAS), B3 (GTR/CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2020 – Prüfungsteil B: B1 (GTR), B3 (GTR/CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2021;
Download: 2017 – B2 (GTR); 2019 – B2 (GTR); 2020 – B1 (CAS)

Kristin Menke

Lösungen zur Abiturprüfung 2020 – Prüfungsteil A;
Lösungen zur Abiturprüfung 2021

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

Sie haben Mathematik in Nordrhein-Westfalen als Grundkurs belegt und planen, in diesem Fach Ihr Abitur abzulegen. Mit diesem Buch helfen wir Ihnen, sich effektiv auf das **Zentralabitur 2022** vorzubereiten:

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches viele Informationen zur **gezielten Vorbereitung auf die Abiturprüfung**. Dazu gehören u. a. eine Aufstellung der für die Prüfung 2022 relevanten inhaltlichen Schwerpunkte und Fokussierungen, Hinweise zum Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben.
- Sie finden darüber hinaus zahlreiche **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl bei der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Das Buch enthält **Übungsaufgaben** im Stil der schriftlichen Abiturprüfung sowie die vom Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen gestellten **Original-Abituraufgaben 2017 bis 2020**.
- Zu sämtlichen Aufgaben wurden von unseren Autoren **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Hinweise und Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem ist dieses Buch ein **ActiveBook** – das bedeutet, Sie erhalten zusätzliches Übungsmaterial **online bei MyStark**:
  – **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil A
  – **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
  – **Jahrgang 2021**, sobald dieser zum Download bereit steht
  – **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2017 bis 2021**, die nicht im Buch abgedruckt sind

  Ausführliche Infos dazu inkl. Zugangscode zu MyStark finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abiturprüfung 2022 vom Schulministerium bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu ebenfalls bei MyStark.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

Ihr Stark Verlag

Hinweise und Tipps zum Abitur 2022

1 Ablauf der Prüfung

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung

In Nordrhein-Westfalen gibt es im Fach Mathematik zentrale schriftliche Abiturprüfungen. Die Aufgaben werden im Auftrag des Ministeriums für Schule und Bildung erstellt. Grundlage für die zentral gestellten Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung sind die verbindlichen Vorgaben der Kernlehrpläne für die gymnasiale Oberstufe.
Die schriftliche Abiturprüfung in Mathematik setzt sich seit dem Abitur 2017 zusammen aus einem **Prüfungsteil A**, der **hilfsmittelfrei** zu bearbeitende Aufgaben umfasst, und einem **Prüfungsteil B**, bestehend aus Aufgaben mit realitätsnahem Kontext und innermathematischen Argumentationsaufgaben **mit Hilfsmitteln**.
Seit dem Abitur 2021 haben sich die zeitlichen Vorgaben für die Bearbeitung geändert. Die Aufgaben der früheren Abiturprüfungen sind inhaltlich (allerdings nicht unbedingt vom Umfang her) als Übungsmaterial weiterhin gut geeignet.

Aufbau der Prüfungsaufgaben

Die schriftliche Abiturprüfung für den Grundkurs gliedert sich in zwei Prüfungsteile:

- Für den **Prüfungsteil A** erhält die Schule drei Sätze **hilfsmittelfrei** zu bearbeitender Aufgaben:
  - Aufgabensatz 1: Analysis und Analytische Geometrie/Lineare Algebra sowie deren Verknüpfungen
  - Aufgabensatz 2: Analysis und Stochastik sowie deren Verknüpfungen
  - Aufgabensatz 3: Analysis, Analytische Geometrie/Lineare Algebra und Stochastik sowie deren Verknüpfungen

  Die **Fachlehrkraft** wählt einen Aufgabensatz aus. Beim Lösen der Aufgaben darf **kein Taschenrechner** und **keine Formelsammlung** verwendet werden.
- Für den **Prüfungsteil B** erhält die Schule zwei Aufgabensätze – einen GTR-Aufgabensatz und einen CAS-Aufgabensatz. Jeder Aufgabensatz beinhaltet:
  - zwei Analysisaufgaben
  - eine Aufgabe zur Vektoriellen Geometrie, eine Aufgabe zur Stochastik und eine weitere Aufgabe zur Analysis

  Die **Fachlehrkraft** stellt aus einem der beiden Aufgabensätze (GTR oder CAS) die Aufgaben für den Prüfungsteil B nach folgenden Vorgaben zusammen:
  Der Prüfungsteil B wird aus **3 Aufgaben** gebildet. Aus den beiden Analysisaufgaben wird **eine** ausgewählt. Aus den übrigen Aufgaben (Aufgabe zur Vektoriellen Geometrie, Aufgabe zur Stochastik und weitere Aufgabe zur Analysis) werden **zwei** ausgewählt.

Zugelassene **Hilfsmittel** für den Prüfungsteil B:

- GTR (grafikfähiger Taschenrechner) **oder** CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

Dauer der Prüfung

Für die Bearbeitung stehen Ihnen im Grundkurs insgesamt **225 Minuten** zur Verfügung. Dabei beträgt die Arbeitszeit für den Prüfungsteil A, der von Ihnen zu Beginn der Prüfung bearbeitet wird, maximal 60 Minuten. Sobald Sie mit dem Prüfungsteil A fertig sind, können Sie Ihre Ausarbeitungen bei der Aufsicht führenden Lehrkraft abgeben. Sie erhalten dann die Aufgaben des Prüfungsteils B, einschließlich der zugelassenen Hilfsmittel. Sollten Sie den Prüfungsteil A schneller bearbeiten können, dürfen Sie auch schon früher mit dem Prüfungsteil B beginnen. Sie haben dann für diesen entsprechend mehr Zeit.

2 Inhaltliche Schwerpunkte und Fokussierungen 2022

Die inhaltlichen **Schwerpunkte und Fokussierungen** für den **Grundkurs** Mathematik in der **Abiturprüfung 2022** sind folgende:

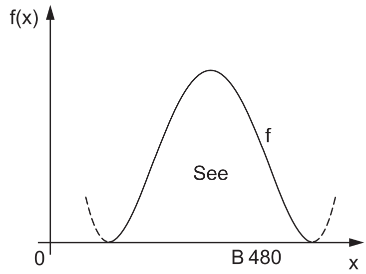
Schwerpunkte und Fokussierungen	**Beispiele**
Funktionen und Analysis	
• Funktionen als mathematische Modelle	2019 – Aufgabe B1 (GTR)
• Fortführung der Differenzialrechnung	
– Untersuchung von ganzrationalen Funktionen	2018 – Aufgabe B2 (GTR/CAS)
– Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei p(x) ein Polynom höchstens zweiten Grades ist	2018 – Aufgabe B1 (GTR)
– Untersuchung von Funktionen, die sich als einfache Summe der oben genannten Funktionstypen ergeben	2017 – Aufgabe B1 (GTR)
– Interpretation und Bestimmungen von Parametern der oben genannten Funktionen	2019 – Aufgabe B2 (CAS), Teilaufgabe a
– notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)	2019 – Aufgabe A, Teilaufgabe b
• Grundverständnis des Integralbegriffs	2017 – Aufgabe B2 (CAS), Teilaufgabe b
• Integralrechnung	2019 – Aufgabe A, Teilaufgabe a

Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung
Prüfungsteil B – Analysis B1

Eingeschlossen von der Bundesstraße B 480, die in einem geeigneten Koordinatensystem entlang der x-Achse verläuft, und dem Graphen der Funktion f mit der Gleichung

$f(x) = x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 40x + 16, \quad x \in \mathbb{R}$

befindet sich ein See. Der Sachverhalt ist in der Abbildung skizziert.



Abbildung

a) (1) Berechnen Sie die Größe des Sees unter der Annahme, dass 1 Längeneinheit 50 m sind.

(2) Es wird vermutet, dass im Punkt A des Sees, der am weitesten von der Bundesstraße entfernt ist, eine Verschmutzung stattgefunden hat.
Bestimmen Sie unter Angabe der Ableitungen der Funktion f und des rechnerischen Nachweises der hinreichenden Bedingung die Koordinaten von A.

b) An der Stelle des Sees, an dem die Verschmutzung vermutet wird, werden Wasserproben entnommen und die Anzahl der Kleinlebewesen in den Proben wird ermittelt. Die Ergebnisse der Proben sind in der Tabelle dargestellt:

Zeit in Tagen nach Beobachtungsbeginn	0	1	4	10	21
Anzahl der Kleinlebewesen	2 000	1 810	1 350	740	250

Tabelle

(1) Begründen Sie, warum im angegebenen Zeitraum von einer exponentiellen Abnahme ausgegangen werden kann.

(2) Unter Berücksichtigung, dass zu Beginn der Beobachtung 2 000 Kleinlebewesen und nach 21 Tagen nur noch 250 Kleinlebewesen in den entsprechenden Proben gezählt werden, soll die exponentielle Abnahme nun durch eine Funktion modelliert werden.
Zeigen Sie durch Lösen eines Gleichungssystems, dass die Modellierung auf eine Funktion mit der Gleichung

$a(t) = 2\,000 \cdot e^{-0{,}099t}, \quad 0 \le t \le 21$

führt. Dabei wird t als Maßzahl zur Einheit 1 Tag und a(t) als Anzahl der Kleinlebewesen zum Zeitpunkt t aufgefasst.

Hinweise und Tipps

Teilaufgabe a

(1) Ermitteln Sie die gemeinsamen Punkte der Begrenzung des Sees mit der Bundesstraße.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph der Funktion f mit der x-Achse einschließt, mit einem bestimmten Integral.

Beachten Sie bei der Berechnung der Größe des Sees, dass 1 Flächeneinheit 2 500 m^2 sind.

(2) Überlegen Sie, welche Bedeutung die Eigenschaft „am weitesten von der Bundesstraße entfernt“ für den Graphen der Funktion hat.

Die notwendige Bedingung für eine Maximalstelle ist: $f'(x) = 0$

Die hinreichende Bedingung für eine Maximalstelle ist: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$

Vergessen Sie nicht, die Koordinaten des Punktes anzugeben.

Teilaufgabe b

(1) Von einer exponentiellen Abnahme kann dann ausgegangen werden, wenn der Abnahmefaktor je Zeiteinheit annähernd gleich ist.

Berechnen Sie den Abnahmefaktor durch Aufstellen geeigneter Gleichungen.

(2) Stellen Sie mithilfe der vorgegebenen Wertepaare ein Gleichungssystem auf und lösen Sie dieses.

(3) Berechnen Sie 30 % des Anfangsbestandes. Setzen Sie das Ergebnis mit dem Funktionsterm gleich und lösen Sie die Gleichung.

Setzen Sie das Ergebnis mit dem Funktionsterm gleich und lösen Sie die Gleichung.

Teilaufgabe c

(1) Lösen Sie die Gleichung $g(t) = 2\,000$ mit einem geeigneten Rechnerbefehl oder grafisch.

Geben Sie an, welchem Tag nach dem Filtereinsatz $(t = 21)$ die Lösung entspricht.

(2) Überlegen Sie, welche Bedeutung die Eigenschaft „wirkt sich positiv aus“ für den Verlauf des Graphen der Funktion hat.

Die notwendige Bedingung für eine Minimalstelle ist: $g'(t) = 0$

Die hinreichende Bedingung für eine Minimalstelle ist: $g'(t) = 0$ und $g''(t) > 0$

Achten Sie auf den Definitionsbereich der Funktion.

Vergessen Sie nicht, den Funktionswert zu diesem Zeitpunkt zu berechnen.

(3) Überlegen Sie, welche Anzahlen der Kleinlebewesen den Grund- bzw. Prozentwert darstellen, und berechnen Sie den Prozentsatz.

Lösung

a) (1) Zur Berechnung des Flächeninhaltes des Sees werden die gemeinsamen Punkte des Graphen der Funktion f, durch den der See begrenzt wird, mit der Bundesstraße B 480 ermittelt. Dies sind die Schnitt- bzw. Berührpunkte des Graphen mit der x-Achse, also die Nullstellen der Funktion f.

GTR

$f(x):=x^4-10\cdot x^3+33\cdot x^2-40\cdot x+16$	*Fertig*
polyRoots$(f(x),x)$	$\{1,1,4,4\}$

CAS

$f(x):=x^4-10\cdot x^3+33\cdot x^2-40\cdot x+16$	*Fertig*
solve$(f(x)=0,x)$	$x=1$ or $x=4$

Die Funktion f hat die doppelten Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$.

Die Größe des Sees entspricht im Modell dem Inhalt der Fläche, die der Graph der Funktion f mit der x-Achse einschließt. Dieser Flächeninhalt ist gleich dem Wert des Integrals der Funktion f im Bereich [1; 4].

$$\int_1^4 f(x)\,dx = 8{,}1\,[\text{FE}]$$

GTR/CAS

$\int_1^4 f(x)\,dx$	8.1
$8.1\cdot 2500$	20250.

Da 1 Längeneinheit 50 m sind, entspricht 1 Flächeneinheit folgende Quadratmeterzahl:
$50\text{ m}\cdot 50\text{ m} = 2\,500\text{ m}^2$

Die Fläche des Sees beträgt somit:
$8{,}1\cdot 2\,500\text{ m}^2 = 20\,250\text{ m}^2$

[Umgerechnet in Ar sind dies 202,5 a.]

(2) Der Punkt, der am weitesten von der Bundesstraße B 480 entfernt ist, ist der lokale (relative) Hochpunkt des Graphen der Funktion f.

Die 1. Ableitung der Funktion f wird mit der Summen- und Potenzregel bestimmt:

$$f'(x) = 4\cdot x^3 - 10\cdot 3x^2 + 33\cdot 2x - 40$$
$$= 4x^3 - 30x^2 + 66x - 40$$

Notwendige Bedingung für eine Maximalstelle: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \iff x_1 = 1 \text{ oder } x_2 = \frac{5}{2} \text{ oder } x_3 = 4$$

Die Stellen $x_1 = 1$ und $x_3 = 4$ kommen für ein Maximum nicht infrage, da sie die gemeinsamen Punkte des Graphen der Funktion f mit der x-Achse sind. Somit bleibt nur $x_2 = \frac{5}{2}$ als Kandidat für eine Maximalstelle.

GTR

$a1f(x):=4\cdot x^3-30\cdot x^2+66\cdot x-40$	*Fertig*
polyRoots$(a1f(x),x)$	$\left\{1,\frac{5}{2},4\right\}$

CAS

$a1f(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Fertig*
$a1f(x)$	$4\cdot x^3-30\cdot x^2+66\cdot x-40$
solve$(a1f(x)=0,x)$	$x=1$ or $x=\frac{5}{2}$ or $x=4$

Für die 2. Ableitung der Funktion f gilt:

$$f''(x) = 4 \cdot 3x^2 - 30 \cdot 2x + 66$$
$$= 12x^2 - 60x + 66$$

Hinreichende Bedingung für eine Maximalstelle: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$

$$f''\left(\frac{5}{2}\right) = -9 < 0$$

Durch Berechnung des entsprechenden Funktionswertes ergibt sich, dass der Punkt $A\left(\frac{5}{2} \,\middle|\, \frac{81}{16}\right)$ am weitesten von der Bundesstraße entfernt ist.

GTR

$a2f(x) := 12 \cdot x^2 - 60 \cdot x + 66$ Fertig

CAS

$a2f(x) := \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$ Fertig

$a2f(x)$ $12 \cdot x^2 - 60 \cdot x + 66$

GTR/CAS

$a2f\left(\frac{5}{2}\right)$ -9

$f\left(\frac{5}{2}\right)$ $\frac{81}{16}$

b) (1) Von einer exponentiellen Abnahme kann dann ausgegangen werden, wenn der Abnahmefaktor je Zeiteinheit annähernd gleich ist.

Ist B_0 der Anfangsbestand und q der Abnahmefaktor, so erhält man zu den angegebenen Zeiten bei einer exponentiellen Abnahme folgende allgemeine Werte:

Zeit in Tagen nach Beobachtungsbeginn	0	1	4	10	21
Anzahl der Kleinlebewesen	2 000	1 810	1 350	740	250
Werte bei exponentieller Abnahme	B_0	$B_0 \cdot q^1$	$B_0 \cdot q^4$	$B_0 \cdot q^{10}$	$B_0 \cdot q^{21}$

Aus der ersten Spalte der Tabelle kann der Anfangsbestand $B_0 = 2\,000$ abgelesen werden. Aus den weiteren Spalten erhält man dann:

$$1\,810 = 2\,000 \cdot q^1 \Rightarrow q = \frac{1\,810}{2\,000} = 0{,}905$$

$$1\,350 = 2\,000 \cdot q^4 \Rightarrow q = \sqrt[4]{\frac{1\,350}{2\,000}} \approx 0{,}906$$

$$740 = 2\,000 \cdot q^{10} \Rightarrow q = \sqrt[10]{\frac{740}{2\,000}} \approx 0{,}905$$

$$250 = 2\,000 \cdot q^{21} \Rightarrow q = \sqrt[21]{\frac{250}{2\,000}} \approx 0{,}906$$

GTR/CAS

$\text{approx}\left(\frac{1810}{2000}\right)$ 0.905

$\text{approx}\left(\sqrt[4]{\frac{1350}{2000}}\right)$ 0.906413

$\text{approx}\left(\sqrt[10]{\frac{740}{2000}}\right)$ 0.905358

$\text{approx}\left(\sqrt[21]{\frac{250}{2000}}\right)$ 0.905724

Der Wachstumsfaktor q ist annähernd gleich. Daher kann von einer exponentiellen Abnahme ausgegangen werden.

Abiturprüfung 2020 Mathematik Grundkurs (Nordrhein-Westfalen)
Prüfungsteil A – Aufgaben ohne Hilfsmittel

Punkte

a) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) Zeigen Sie: $f'(-1) = 2$. 2

(2) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = -1$. 4

b) Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = e^x - e$, $x \in \mathbb{R}$.
Der Graph von f und die Koordinatenachsen begrenzen im 4. Quadranten eine Fläche (vgl. Abbildung 1).

(1) Der Graph von f hat genau eine Nullstelle.
Zeigen Sie, dass $x = 1$ die Nullstelle des Graphen von f ist. 2

(2) Berechnen Sie den Inhalt der vom Graphen von f und den Koordinatenachsen eingeschlossenen Fläche. 4

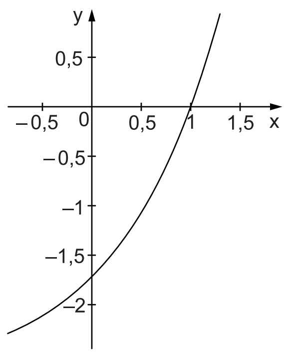


Abbildung 1

c) Die Punkte A(0|0|0), B(3|4|0), C, D(–8|6|0), E(0|0|10), F, G und H bilden einen Quader (siehe Abbildung 2).

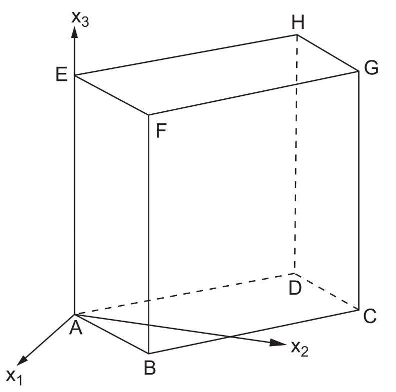


Abbildung 2

Hinweise und Tipps

Teilaufgabe a

(1) Bestimmen Sie die 1. Ableitung.

(2) Die Steigung einer Tangente an der Stelle $x = -1$ ergibt sich durch die 1. Ableitung von f an der Stelle $x = -1$.

Bestimmen Sie den Punkt $S(-1 \mid y)$ und stellen Sie die Gleichung der Tangente auf.

Teilaufgabe b

(1) Zeigen Sie, dass $f(1) = 0$.

(2) Bestimmen Sie mithilfe von Abbildung 1 und Teilaufgabe (1) die Grenzen des Integrals.

Teilaufgabe c

(1) Ermitteln Sie die Koordinaten des Ortsvektors $\overrightarrow{OG}$ durch eine Vektorkette mit geeigneten Vektoren im Quader vom Ursprung (Punkt A) bis zum Punkt G.

Die Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{CG}$ können nicht direkt berechnet werden, da die Koordinaten von C nicht gegeben sind. Durch welche Vektoren im Quader können sie ausgedrückt werden?

(2) Bestimmen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$.

Zeigen Sie mithilfe des Skalarprodukts, dass die beiden Vektoren senkrecht zueinander verlaufen.

(3) Im Quader berechnet man das Volumen durch $V = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AE}\right|$.

Teilaufgabe d

(1) Bedenken Sie, dass es sich um eine Binomialverteilung handelt. Ermitteln Sie anhand des Terms die Anzahl der teilnehmenden Personen, die Anzahl der Personen mit Gewinn und die Gewinnwahrscheinlichkeit.

(2) Betrachten Sie die Zufallsgröße X für die Anzahl der Personen mit Gewinn.

Berechnen Sie $P(X = 4)$.

(3) Erstellen Sie eine Gleichung für $P(X = 0) = \frac{4}{9}$, indem Sie für die Gewinnwahrscheinlichkeit p als Variable einsetzen. Lösen Sie die Gleichung nach p auf.

Lösung

a) (1) Die 1. Ableitung von f lautet:

$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 1$

$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 1 = 3 - 1 = 2$

(2) Eine Tangente hat die Gleichung $y = m \cdot x + b$.

Der Berührungspunkt S der Tangente mit dem Graphen von f an der Stelle $x = -1$ wird berechnet durch:

$f(-1) = (-1)^3 - (-1) = (-1) + 1 = 0 = y$

Damit gilt: $S(-1\,|\,0)$

Die Steigung m der Tangente entspricht der Steigung des Graphen von f im Punkt S.

Man erhält m, indem man $x = -1$ in die 1. Ableitung von f einsetzt (siehe Teilaufgabe a (1)).

$f'(-1) = 2 = m$

Setzt man die Werte für $S(-1\,|\,0)$ und $m = 2$ in die Tangentengleichung ein, so erhält man:

$0 = 2 \cdot (-1) + b$

$0 = -2 + b \qquad | +2$

$b = 2$

Die Tangentengleichung lautet somit: $y = 2 \cdot x + 2$

b) (1) $f(1) = e^1 - e = 0$

(2) Eine Stammfunktion von f ist:

$F(x) = e^x - e \cdot x$

Da der Graph von f an der Stelle $x = 1$ die einzige Nullstelle besitzt, kann der gesuchte Flächeninhalt wie folgt bestimmt werden:

$$\int_0^1 (e^x - e)\,dx = [e^x - e \cdot x]_0^1 = (e^1 - e \cdot 1) - (e^0 - e \cdot 0) = 0 - 1 = -1$$

Die eingeschlossene Fläche beträgt demnach 1 FE.

c) (1) Eine Vektorkette von A nach G lautet:

$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$

Es gilt:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$