2021

Abitur

Original-Prüf
mit Lösunger

MEHR
ERFAHREN

Brandenbur

Mathematik LK

+ *Übungsaufgaben*
+ *Online-Glossar*

ActiveBook
Interaktives
Training

Original-Prüfungsaufgaben
2020 zum Download

STARK

Inhalt

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2020 zur Veröffentlichung freigegeben sind, können Sie sie als PDF auf der Plattform MyStark herunterladen.

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Autorin und Autoren:

Sabine Flohrer:
2016: Aufgaben 3.1 und 3.2; 2017: Aufgaben 3.1 und 4.2

Dr. Detlef Launert:
2016: Aufgaben 1, 2.1, 2.2 und 2.2 (CAS); 2017: Aufgaben 1, 2.1, 2.2, 2.2 (CAS), 3.2 und 4.1; 2017 (Nachschreibtermin); 2018: Aufgaben 1, 2.1, 2.2, 3.2 und 4.1; 2019: Aufgabe 1 Analysis, Aufgaben 2.1, 2.2; 2020: Aufgabe 1 Analysis, Aufgaben 2.1, 2.2

Lauri Lehmann:
2018: Aufgaben 3.1 und 4.2; 2019: Aufgabe 1 Geometrie/Stochastik, Aufgaben 3.1, 3.2, 4.1 und 4.2; 2020: Aufgabe 1 Geometrie/Stochastik, Aufgaben 3.1, 3.2, 4.1 und 4.2

Peter Bunzel:
Übungsaufgaben: Aufgabe 2

Dr. Wilfried Zappe und Dr. Hubert Langlotz:
Übungsaufgaben: Aufgaben 1, 4 und 5

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Übungsbuch ist die ideale Hilfe bei der Vorbereitung auf das **Zentralabitur 2021** für den **Leistungskurs in Brandenburg** im Fach **Mathematik**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches wichtige **Informationen** über Inhalt und Aufbau der Prüfungsaufgaben für das **Abitur 2021**. Dies ermöglicht Ihnen, sich gezielt auf die Abiturprüfung vorzubereiten. Darüber hinaus finden Sie viele **Hinweise und Tipps**, die Ihnen helfen, effektiv und erfolgreich an die Lösung der Prüfungsaufgaben heranzugehen.

- Im zweiten Teil stehen Ihnen **Übungsaufgaben** zum **hilfsmittelfreien Teil** zur Verfügung. Sie umfassen Themeninhalte, die im kommenden Jahr geprüft werden können, in den vergangenen Jahren jedoch nicht Teil des Prüfungsstoffs waren.

- Der dritte Teil enthält die **Original-Prüfungsaufgaben 2016 bis 2019** von Brandenburg. Da das Corona-Virus im vergangenen Schuljahr die Prüfungsabläufe durcheinandergebracht und manches verzögert hat, stehen Ihnen die **Prüfungsaufgaben 2020** auf der **Plattform MyStark** zum Download zur Verfügung. Anhand der Original-Prüfungsaufgaben können Sie sich ein genaues Bild davon machen, wie die Prüfung in den letzten Jahren ausgesehen hat.
  Aufgrund der Diskussionen und großen Anzahl der Schüler, die das Abitur 2017 nachgeschrieben haben, sind für das Jahr 2017 die Aufgaben des Haupt- und Nachschreibtermins aufgeführt. Beide dieser Abiturprüfungen entsprechen dem aktuellen Lehrplan und sind somit relevant zur Prüfungsvorbereitung.

- Die Übungsaufgaben und die Original-Prüfungsaufgaben sind zusätzlich mit **separaten Tipps zum Lösungsansatz** versehen, die Ihnen Hilfestellungen für die Lösung der Aufgabe geben. Wenn Sie mit einer Aufgabe nicht zurechtkommen, schauen Sie deshalb nicht gleich in die Lösungen, sondern nutzen Sie schrittweise die Lösungstipps, um selbst die Lösung zu finden.

- Zu allen Aufgaben wurde **eine vollständige, ausführlich kommentierte Lösung mit allen erforderlichen Rechenschritten** erstellt, die Ihnen Sie ermöglicht, Ihre Lösung eigenständig zu kontrollieren und die Rechenwege Schritt für Schritt nachzuvollziehen.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abitur-Prüfung 2021 vom LISUM Berlin-Brandenburg bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu auf der Plattform MyStark (Zugangscode vgl. Farbseiten).

Das Autorenteam wünscht Ihnen für die Prüfungsvorbereitung und für das Abitur viel Erfolg!

ActiveBook
Interaktives Training

Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online auf MyStark Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren! Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Eisbecher BE

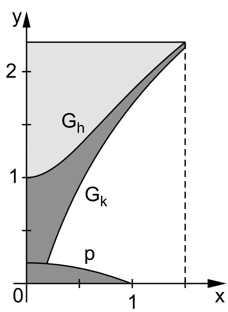
Gegeben ist die Funktion f_a mit der Gleichung $f_a(x) = \ln(ax^2 + 1)$; $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.
Die Graphen dieser Funktionen sind G_a.

a) Geben Sie den Definitionsbereich von f_a an und zeigen Sie, dass alle Graphen G_a durch den Koordinatenursprung verlaufen. Ermitteln Sie den exakten Wert des Parameters a, für dessen zugehörige Funktion f_a gilt: $f_a(2) = 2$. 8

b) Zeigen Sie, dass alle Graphen G_a einen gemeinsamen lokalen Extrempunkt haben. Begründen Sie ohne Zuhilfenahme der zweiten Ableitung, dass dieser Extrempunkt für alle Graphen wegen $a > 0$ ein Tiefpunkt ist. 8

c) Die Tangenten an G_a im Punkt $B_a(1 \mid f_a(1))$ sind t_a.
Begründen Sie, dass keine dieser Tangenten einen Anstieg größer als 2 haben kann.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das von der y-Achse sowie der Tangente und der Normalen an G_1 im Punkt B_1 begrenzt wird.
[Kontrollergebnis: t_1: $y = x + \ln 2 - 1$] 14

Im Bild ist der halbe Längsquerschnitt eines Eisbechers dargestellt. Er wird im Intervall [0; 1,5] durch Teile der Graphen der Funktionen h und k mit $h(x) = 0{,}75 \cdot f_2(x) + 1$ und $k(x) = 1{,}75 \cdot \ln(2{,}5x + 1) - 0{,}5$, eine zur y-Achse symmetrische quadratische Parabel p und die beiden Koordinatenachsen begrenzt.
Der Eisbecher entsteht durch Rotation der dunkel dargestellten Fläche um die y-Achse, 1 LE = 4 cm.



d) Je 12 Eisbecher werden stehend in einem quaderförmigen Karton mit 12 gleich großen quaderförmigen Fächern verpackt.
Ermitteln Sie die Kantenlängen, die ein Fach für einen stehenden Eisbecher mindestens haben muss. 4

e) Der Fuß, dessen oberer Rand im Querschnitt durch die Parabel p modelliert wird, hat am Boden einen Durchmesser von 8 cm und eine Querschnittsfläche von $\frac{64}{15}\,\text{cm}^2$.
Ermitteln Sie eine Gleichung für die Parabel p.
[Kontrollergebnis: $p(x) = -0{,}2x^2 + 0{,}2$] 9

f) Zur Berechnung der Masse des Fußes ist ein Schüler folgendermaßen vorgegangen:

(1) Berechnung des Volumens in VE: $V = \pi \cdot \int_0^1 (p(x))^2\,dx$

(2) Umwandeln des Volumens in cm³: $\frac{1\,\text{VE}}{4\,\text{cm}^3} = \frac{V}{V_{(\text{cm}^3)}}$

(3) Multiplizieren des erhaltenen Wertes mit der Dichte des Materials.

Beurteilen Sie jeweils einzeln die drei Teilschritte und beschreiben Sie, gegebenenfalls unter Zuhilfenahme einer Skizze, wie fehlerhafte Schritte bei diesem Vorgehen berichtigt werden müssen. $\frac{7}{50}$

Lösungen zu Aufgabe 2.1

a) Die natürliche Logarithmusfunktion ist nur für Werte $x > 0$ definiert.

$$ax^2 + 1 > 0$$
$$ax^2 > -1$$
$$x^2 > -\frac{1}{a}$$

Diese Gleichung ist für den gegebenen Definitionsbereich immer erfüllt, da $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $0 > -\frac{1}{a}$ für alle $a \in \mathbb{R}, a > 0$.
Für den Definitionsbereich der Funktion $f_a(x)$ gilt: $x \in \mathbb{R}$

Der Koordinatenursprung liegt im Punkt $O(0|0)$.
Es soll also gelten:

$$f_a(0) = 0$$
$$\ln(a \cdot 0^2 + 1) = 0$$
$$\ln 1 = 0$$
$$0 = 0$$

Die Nullstelle der natürlichen Logarithmusfunktion ($\ln x$) ist $x_0 = 1$.

Die Gleichung ist erfüllt, d. h., die Funktion $f_a(x)$ verläuft durch den Koordinatenursprung. Da das Ergebnis unabhängig vom Parameter a ist, gilt dies für alle Funktionen der Schar.

$$f_a(2) = 2$$
$$\ln(a \cdot 2^2 + 1) = 2 \qquad | \, e$$
$$4a + 1 = e^2$$
$$a = \underline{\underline{\frac{e^2 - 1}{4}}}$$

b) Für mögliche lokale Extrempunkte gilt: $f'_a(x_E) = 0$

$$f'_a(x) = \frac{1}{ax^2 + 1} \cdot 2ax$$

$$\frac{2ax_E}{ax_E^2 + 1} = 0$$

Ein Bruch wird null, wenn der Zähler null wird.

$$2ax_E = 0$$

$a = 0$ ist keine Lösung wegen $a > 0$.
$x_E = 0$

Wegen des Quadrats von x und $a > 0$ ist der Nenner des Bruchs für den gesamten Definitionsbereich stets positiv.
Für $x < 0$ ist $2ax < 0$ (da $a > 0$) und $f'_a(x) < 0$. Die Funktion ist streng monoton fallend.
Für $x > 0$ ist $2ax > 0$ (da $a > 0$) und $f'_a(x) > 0$. Die Funktion ist streng monoton steigend.

Da im Koordinatenursprung $O(0|0)$ ein Vorzeichenwechsel für $f_a'(x)$ stattfindet, liegt dort ein Extrempunkt vor. Dieser ist unabhängig vom Parameter a und daher für alle Graphen gleich. Aufgrund der Art der Änderung des Monotonieverhaltens handelt es sich um einen Tiefpunkt.

c) Allgemein lautet die Tangentengleichung:

$$t_a(x) = m_{t_a} \cdot x + n_{t_a}$$

Die Steigung der Tangente entspricht der 1. Ableitung von $f_a(x)$ im Punkt B_a.

$$m_{t_a} = f_a'(1)$$

$$f_a'(1) = \frac{2 \cdot a \cdot 1}{a \cdot 1^2 + 1} = \frac{2a}{a+1}$$

Umformen des Terms:

$$m_{t_a} = \frac{2a}{a+1} = \frac{2a}{a \cdot \left(1 + \frac{1}{a}\right)} = \frac{2}{1 + \frac{1}{a}}$$

Damit die Steigung größer als 2 wird, muss für den Nenner gelten:

$$1 + \frac{1}{a} < 1 \qquad \Big| -1$$

$$\frac{1}{a} < 0$$

Mit $a > 0$ laut Definition ist diese Ungleichung nicht zu erfüllen, d. h., es gibt keine Tangente mit einer Steigung größer als 2.

Für die Tangentengleichung am Punkt B_1 ergibt sich:

$$m_{t_1} = f_1'(1) = \frac{2 \cdot 1}{1+1} = 1$$

$$t_1(x) = x + n_{t_1}$$

Mit der y-Koordinate des Punktes B_1 erhält man n_{t_1}.

$$f_1(1) = \ln(1 \cdot 1^2 + 1) = \ln 2$$

$$t_1(1) = \ln 2$$

$$1 + n_{t_1} = \ln 2$$

$$n_{t_1} = -1 + \ln 2$$

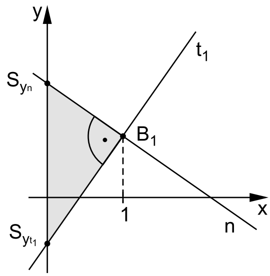
$$\Rightarrow \quad t_1(x) = x - 1 + \ln 2$$

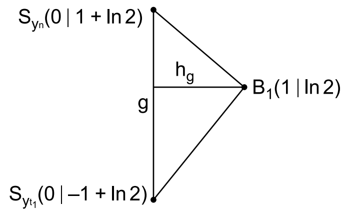
Mit $m_n = -\frac{1}{m_{t_1}}$ folgt für die Normalengleichung:

$$n(x) = -\frac{1}{1}x + s$$

Mit den Koordinaten von Punkt B_1 folgt:

$$n(1) = \ln 2$$
$$-1 \cdot 1 + s = \ln 2$$
$$s = 1 + \ln 2$$
$$\Rightarrow \quad n(x) = -x + 1 + \ln 2$$





Aus den Skizzen für das Dreieck wird ersichtlich, dass die Höhe des Dreiecks der x-Koordinate des Punktes B_1 entspricht. Die Grundseite des Dreiecks ergibt sich aus der Summe der Achsenabschnitte (Beträge) der Tangenten- und Normalengleichung.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g \\ &= \frac{1}{2} \cdot (|1 + \ln 2| + |-1 + \ln 2|) \cdot 1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1 + \ln 2 + 1 - \ln 2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 = 1\,[\text{FE}] \end{aligned}$$

$$|1 + \ln 2| = 1 + \ln 2, \ \text{weil } 1 + \ln 2 > 0$$
$$|-1 + \ln 2| = -(-1 + \ln 2) = 1 - \ln 2, \ \text{weil } -1 + \ln 2 < 0$$

Das Dreieck hat den Flächeninhalt $\underline{\underline{1\,[\text{FE}]}}$.

d) Die Grundfläche für ein Fach ist quadratisch, da der Eisbecher rotationssymmetrisch zur y-Achse ist. Die Grundseitenlängen kann man der Abbildung in der Aufgabenstellung entnehmen.

Für die Länge und Breite ergibt sich:

$$b = \ell = 2 \cdot 1{,}5\,[\text{LE}] \cdot 4\text{ cm} = 12\text{ cm}$$

1,5 [LE] liest man ab. Den Faktor 2 benötigt man, da nur der „halbe“ Eisbecher abgebildet ist. Zudem gilt 1 LE = 4 cm.

Da der Graph G_h die obere Begrenzung des Eisbechers ist, erhält man die Höhe über den Funktionswert von h(x) an der Randbegrenzung, d. h. für $x = 1{,}5$.

$$h(x) = 0{,}75 \cdot \ln(2x^2 + 1) + 1$$

$$h(1{,}5) = 0{,}75 \cdot \ln(2 \cdot 1{,}5^2 + 1) + 1 \approx 2{,}28\,[\text{LE}]$$

Umrechnung in cm:

$$h \approx 2{,}28 \cdot 4\text{ cm} \approx 9{,}12\text{ cm}$$

Ein Fach hat also ca. die Kantenlängen $\underline{\underline{12\text{ cm x }12\text{ cm x }9{,}12\text{ cm}}}$.

e) Die allgemeine Form für eine Parabelgleichung lautet: $p(x) = ax^2 + bx + c$

Mit den Nullstellen $N_1(1\,|\,0)$ und $N_2(-1\,|\,0)$ ergibt sich:

Die Koordinaten von N_1 entnimmt man der Abbildung. Die Koordinaten für N_2 folgen aus der Tatsache, dass der Eisbecher rotationssymmetrisch zur y-Achse ist.

$$\begin{aligned} p(1) &= 0 \\ a + b + c &= 0 \\ c &= -a - b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(-1) &= 0 \\ a - b + c &= 0 \\ a - b - a - b &= 0 \\ -2b &= 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0 \end{aligned}$$

Damit folgt $c = -a$ und für die Parabel:

$$p(x) = ax^2 - a$$

Für die Querschnittsfläche gilt:

$$A = \frac{64}{15}\text{ cm}^2 \cdot \frac{1}{16\text{ cm}^2} = \frac{4}{15}\,[\text{FE}]$$

$1\text{ FE} = 1\text{ LE} \cdot 1\text{ LE} = 4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 16\text{ cm}^2$

Die Querschnittsfläche ergibt sich über das Integral:

$$A = \int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \frac{4}{15}$$

Aufgrund der Symmetrie gilt:

$$2 \cdot \int_{0}^{1} p(x)\,dx = \frac{4}{15}$$

$$2 \cdot \int_{0}^{1} (ax^2 - a)\,dx = \frac{4}{15}$$

$$2 \cdot \left[\frac{a}{3}x^3 - ax\right]_0^1 = \frac{4}{15}$$

$$2 \cdot \left(\frac{a}{3} - a\right) = \frac{4}{15}$$

$$-\frac{4}{3}a = \frac{4}{15} \qquad \left| \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)\right.$$

$$a = -\frac{1}{5}$$

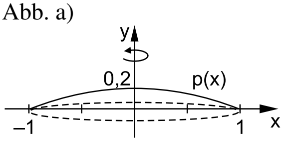
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{p(x) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}}}$$

f) zu (1):

$V = \pi \int_0^1 (p(x))^2\,dx$ beschreibt die Rotation der Funktion um die x-Achse.

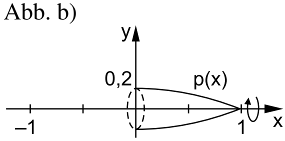
p(x) muss aber laut Aufgabenstellung um die y-Achse rotieren (vgl. Abbildungen a und b).
$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{falscher Schritt}}}$

Abb. a)



entstehender Körper, wenn p(x) für $x \in [0; 1]$ um die y-Achse rotiert

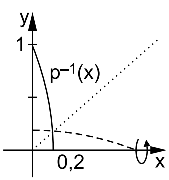
Abb. b)



entstehender Körper, wenn p(x) für $x \in [0; 1]$ um die x-Achse rotiert

Damit man bei Rotation um die x-Achse denselben Körper erhält wie bei Rotation um die y-Achse, muss die Parabel p an der Quadrantenhalbierenden (I. Quadrant) gespiegelt werden (vgl. Abbildung c).

Abb. c)



Für das entsprechende Integral benötigt man die Umkehrfunktion von p(x) und den Funktionswert für p(0).

$$p(0) = -\frac{1}{5} \cdot 0^2 + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

Hinweis: Den Wert für die Nullstelle erhält man auch durch folgende Überlegung. Der Scheitelpunkt von p(x) ist S(0 | 0,2). Durch Spiegelung an der Quadrantenhalbierenden erhält man N(0,2 | 0) (x- und y-Koordinate werden vertauscht).
Grundsätzlich gilt, dass beim Bilden der Umkehrfunktion Definitions- und Wertebereich (der Ausgangsfunktion) vertauscht werden.

Berechnung der Umkehrfunktion:

$$y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5} \qquad \left| -\frac{1}{5}\right.$$

$$y - \frac{1}{5} = -\frac{1}{5}x^2 \qquad | \cdot (-5)$$

$$-5y + 1 = x^2 \qquad | \sqrt{}$$

$$x = \sqrt{-5y+1}$$

$$\Rightarrow \quad p^{-1}(x) = y = \sqrt{-5x+1} \quad \text{mit } x \in [0; 0{,}2]$$

Das korrekte Integral lautet somit:

$$V = \pi \cdot \int_0^{0,2} (p^{-1}(x))^2\,dx = \pi \cdot \int_0^{0,2} (\sqrt{-5x+1})^2\,dx$$

zu (2):

$$1\,\text{VE} = 1\,\text{LE} \cdot 1\,\text{LE} \cdot 1\,\text{LE} = \text{LE}^3$$

$$1\,\text{LE} = 4\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad 1\,\text{VE} = (4\,\text{cm})^3 = 64\,\text{cm}^3$$

Für das Umwandeln des Volumens von LE^3 in das Volumen in cm^3 muss also gelten:

$$\frac{1\,\text{VE}}{64\,\text{cm}^3} = \frac{V}{V_{(\text{cm}^3)}}$$

Die verwendete Umrechnung ist demnach ein $\underline{\underline{\text{falscher Schritt}}}$.

zu (3):
Sei ρ die Dichte des Materials, dann gilt:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$m = \rho V$$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\text{richtiger Schritt}}}$