MEHR ERFAHREN

TRAINING

Gymnasium

Algebra und Stochastik 9. Klasse

STARK

Inhalt

Autor: Markus Fiederer

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit diesem auf **G8** abgestimmten Trainingsbuch kannst du den **gesamten Unterrichtsstoff** für **Algebra und Stochastik** in der **9. Klasse** selbstständig wiederholen und dich optimal auf Klassenarbeiten bzw. Schulaufgaben vorbereiten.

- Um dir bei der Herangehensweise an mathematische Probleme zu helfen, werden im ersten Teil dieses Buches **Methoden** zur effektiven Lösung von Mathematikaufgaben vorgestellt.
- In den folgenden Kapiteln werden alle **unterrichtsrelevanten Themen** aufgegriffen und anhand von ausführlichen **Beispielen** veranschaulicht. **Kleinschrittige Hinweise** erklären dir die einzelnen Rechen- oder Denkschritte genau. Die Zusammenfassungen der **zentralen Inhalte** sind außerdem in farbiger Schrift hervorgehoben.
- **Zahlreiche Übungsaufgaben** mit ansteigendem Schwierigkeitsgrad bieten dir die Möglichkeit, die verschiedenen Themen einzuüben. Hier kannst du überprüfen, ob du den gelernten Stoff auch anwenden kannst. Komplexere Aufgaben, bei denen du wahrscheinlich etwas mehr Zeit zum Lösen brauchen wirst oder die sich auch auf Themengebiete aus der 5. und 8. Klasse beziehen, sind mit einem ✳ gekennzeichnet.
- Zu allen Aufgaben gibt es am Ende des Buches **vollständig vorgerechnete Lösungen** mit **ausführlichen Hinweisen**, die dir den Lösungsansatz und die jeweiligen Schwierigkeiten genau erläutern.
- Begriffe, die dir unklar sind, kannst du im **Grundwissen der 5. bis 9. Klasse** nachschlagen. Dort sind alle wichtigen Definitionen aus der Algebra und Stochastik zusammengefasst, die du am Ende der 9. Klasse wissen musst.

Ich wünsche dir gute Fortschritte bei der Arbeit mit diesem Buch und viel Erfolg in der Mathematik!

Markus Fiederer

So arbeitest du mit diesem Buch

Besonders effektiv kannst du mit diesem Buch **arbeiten**, wenn du dich an den folgenden Vorgehensweisen orientierst:

- Lies dir zunächst die **Methoden** zur effektiven Lösung einer Mathematikaufgabe gründlich durch. Versuche dann, dich bei der Bearbeitung der Aufgaben an diese Schritte zu halten.

- Um den **Unterrichtsstoff zu trainieren**, hast du grundsätzlich zwei verschiedene Möglichkeiten:

  Methode 1:
  - Bearbeite zunächst den **Unterrichtsstoff mit den Beispielen**.
  - Löse anschließend selbstständig die **Übungsaufgaben** in der angegebenen Reihenfolge.
  - Schlage bei der **Bearbeitung der Aufgaben** erst dann in den Lösungen nach, wenn du mit einer Aufgabe wirklich fertig bist.
  - Solltest du mit einer Aufgabe gar nicht zurechtkommen, dann markiere sie und bearbeite sie mithilfe der Lösung.
  - Versuche, die Aufgabe nach ein paar Tagen noch einmal selbstständig zu lösen.

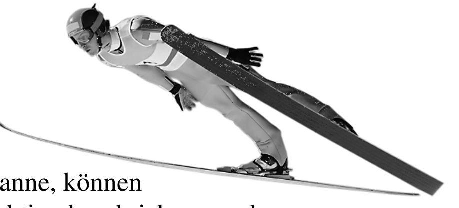
  Methode 2:
  - Beginne damit, einige **Übungsaufgaben in einem Kapitel zu lösen** und danach mit den angegebenen Lösungen zu vergleichen.
  - Wenn alle Aufgaben richtig sind, bearbeitest du die weiteren Aufgaben des Kapitels.
  - Bei Unsicherheiten oder Schwierigkeiten **wiederholst du die entsprechenden Inhalte** in den einzelnen Kapiteln.

- An die **komplexeren Aufgaben**, die du an dem ✳ erkennst, solltest du dich erst dann wagen, sobald du einige der übrigen Aufgaben gut lösen konntest. Lass dich jedoch nicht entmutigen, wenn du bei diesen Aufgaben nicht sofort auf eine Lösung kommst.

- Stolperst du in den einzelnen Kapiteln oder den Lösungen über Begriffe, die dir unklar sind, kannst du diese im **Grundwissen der 5. bis 9. Klasse** nachschlagen. Ebenfalls kannst du damit am Ende der 9. Klasse noch einmal alle wichtigen Definitionen aus der Algebra und Stochastik wiederholen.

Quadratische Funktionen

1 Parabel

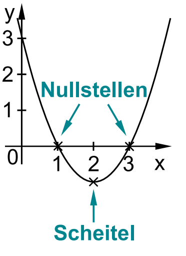


Die Bahnkurve eines Skispringers entspricht einem Teil einer Parabel. Solche Bahnkurven von Fallbewegungen, wie z. B. die Kurve eines Speerwurfs, einer fliegenden Kugel der Verlauf des Wasserstrahls aus einer Gießkanne, können mathematisch mithilfe einer quadratischen Funktion beschrieben werden.

Für die Zeichnung des Graphen einer quadratischen Funktion ist eine Wertetabelle hilfreich. Zum Beispiel gilt für die Funktion $f: x \mapsto y = x^2 - 4x + 3$:

x	0	1	2	3	4
y	3	0	–1	0	3

Die ermittelten Punkte ergeben in ein Koordinatensystem eingetragen eine **Parabel**.



> Eine Funktion mit der Zuordnungsvorschrift
> $\mathbf{f: x \mapsto y = ax^2 + bx + c}$ $\quad a \neq 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$
> heißt **quadratische Funktion**.
> Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine **Parabel**.

Charakteristische Punkte:
Nullstelle(n): Schnittpunkt(e) des Graphen mit der x-Achse.
Scheitelpunkt: Punkt des Graphen, der auf der Symmetrieachse der Parabel liegt.

Beispiel

Gegeben ist die Funktionsgleichung $f: x \mapsto y = -x^2 + 2x + 3$ mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeichne die Funktion im Intervall [–2; 4].

b) Bestimme mithilfe der Zeichnung den Scheitelpunkt und die Nullstellen der Parabel.

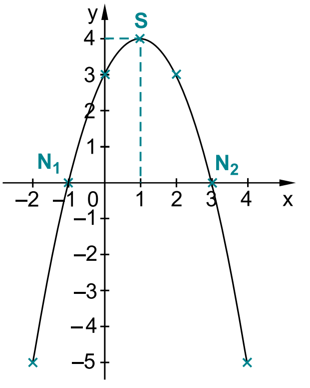
Lösung:
a) Zeichnung der Funktion über eine Wertetabelle:

x	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–5	0	3	4	3	0	–5

Dafür werden die x-Werte in die Funktionsgleichung eingesetzt.

Beispiel:
$y = -x^2 + 2x + 3$
$x = 2$:
$y = -2^2 + 2 \cdot 2 + 3$
$y = 3$

b) Nullstellen und Scheitelpunkte können nun aus dem Graphen herausgelesen werden:
$S(1|4)$; $N_1(-1|0)$; $N_2(3|0)$



Aufgaben

37. Ermittle aus den gegebenen Funktionsgleichungen die zugehörigen Wertetabellen und zeichne den Graphen im angegebenen Intervall.
Lies näherungsweise den Scheitelpunkt und (falls vorhanden) die Nullstellen aus der Zeichnung heraus.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$; $[-4; 2]$

b) $f(x) = x^2 - x - 2$; $[-2; 3]$

c) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$; $[0; 4]$

d) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$; $[1; 4]$

e) $f(x) = 0{,}2x^2 + 0{,}2x - 0{,}15$; $[-2; 1]$

f) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}$; $[-3; 3]$

g) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$; $[-2; 2]$

h) $f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{24}$; $[0; 3]$

38. Quadratische Funktionen zeichnen sich durch die allgemeine Gleichung
$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \in \mathbb{R};\ a \neq 0)$
aus.
Ordne den folgenden Funktionsgleichungen die Parameter a, b und c zu und entscheide damit, ob es sich um eine quadratische Funktion handelt.

a) $f(x) = -3x^2 + 5x - 2$

b) $f(x) = -1{,}5 + 15{,}3x - \frac{1}{2}x^2$

c) $f(x) = (2x - 3) \cdot (1 - x)$

d) $f(x) = 7x - \frac{1}{3} + 2x^2 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}x$

e) $f(x) = \left(-\frac{1}{2}x - 1\right) \cdot \frac{1}{3}x + 7$

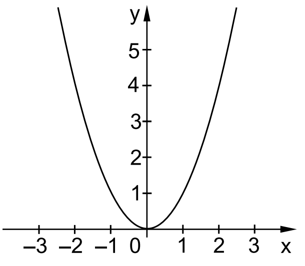
f) $f(x) = (2x + 1) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) - 2x^2$

g) $f(x) = \frac{\left(2 - \frac{1}{3}x\right) \cdot \left(\frac{1}{x} + x\right)}{3}$

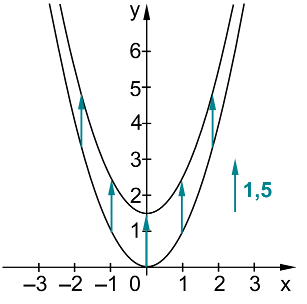
h) $f(x) = \frac{(x + 3) \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)}{(x + 1)}$

2 Verschiebung einer Normalparabel in y-Richtung

Den Graph der Funktion mit der Funktionsgleichung
$y = x^2$
nennt man **Normalparabel**.



Die Normalparabel wird um **1,5** Längeneinheiten nach oben verschoben, indem man zu jedem Funktionswert der Normalparabel **1,5** dazuaddiert.
$y = x^2 + 1{,}5$



Der Graph einer Funktion mit der Funktionsgleichung
$f: x \mapsto y = x^2 + c$
ist eine vertikal verschobene Normalparabel.
$c > 0$ um c nach oben verschobene Normalparabel
$c < 0$ um c nach unten verschobene Normalparabel
$S(0\,|\,c)$ Scheitelpunkt
Parabeln dieser Art sind achsensymmetrisch zur y-Achse.

Beispiele

1. Bestimme den Scheitelpunkt und die Nullstellen des Graphen der Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^2 - 4$.
   Lösung:
   $c = -4 < 0$
   Der Graph ist eine um **4** Längeneinheiten in negative y-Richtung (nach unten) verschobene Normalparabel.
   Scheitelpunkt $S(0\,|\,-4)$ $\quad$ $S(0\,|\,c)$ mit $c = -4$
   Setzt man $y = 0$, erhält man die Nullstellen des Graphen:
   $y = x^2 - 4$
   $0 = x^2 - 4 \quad |+4$
   $4 = x^2$
   Es gibt zwei Zahlen, die quadriert 4 ergeben:
   $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$ sind die Nullstellen der Parabel.
   Die beiden Schnittpunkte mit der x-Achse lauten $N_1(2\,|\,0)$ und $N_2(-2\,|\,0)$.

2. Eine in y-Richtung verschobene Normalparabel enthält den Punkt $P(3\,|\,12)$.
   Bestimme die zugehörige Funktionsgleichung, den Scheitelpunkt und die Nullstellen (falls möglich).

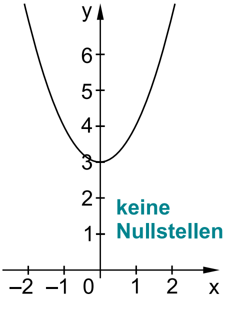
   Lösung:
   Bestimme die Funktionsgleichung durch Einsetzen des Punktes $P(\mathbf{3}\,|\,\mathbf{12})$ in die allgemeine Funktionsgleichung $\mathbf{y} = \mathbf{x}^2 + c$.

   $\mathbf{12} = \mathbf{3}^2 + c$
   $12 = 9 + c$
   $3 = c$
   $y = x^2 + \mathbf{3}$

   Der Graph ist eine um **drei** Längeneinheiten in positive y-Richtung verschobene Normalparabel.

   Scheitelpunkt $S(0\,|\,\mathbf{3})$

   $S(0\,|\,c)$ mit $c = 3$



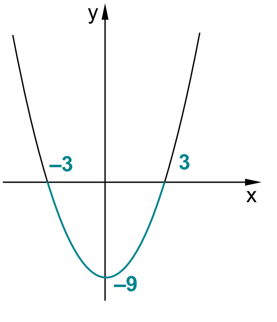
   Die Nullstelle zeichnet sich wieder durch den **y-Wert 0** aus:

   $\mathbf{y} = x^2 + 3$
   $\mathbf{0} = x^2 + 3 \qquad |-3$
   $-3 = x^2$ ↯

   Es gibt keine reelle Zahl, die in ihrem Quadrat negativ ist. Daher existiert keine Nullstelle. Der Scheitelpunkt der Normalparabel ist oberhalb der x-Achse.

3. Löse die Ungleichung $x^2 - 9 < 0$.

   Lösung:
   Für die Ungleichung $x^2 - 9 < 0$ kann man die Lösungsmenge durch Betrachtung des Graphen der Funktion mit der Funktionsgleichung $y = x^2 - 9$ ermitteln.



   Der Graph ist eine um 9 Längeneinheiten in negative y-Richtung verschobene Normalparabel.
   Der farbig markierte Teil (unterhalb der x-Achse) des Graphen beschreibt das Intervall mit den negativen y-Werten, d. h., im Intervall **]–3; 3[** ist die Ungleichung $x^2 - 9 < 0$ erfüllt.
   Für $x = -3$ bzw. $x = 3$ ist die Gleichung $x^2 - 9 = 0$ erfüllt.
   $x^2 - 9 < 0$ führt für diese beiden x-Werte zu einer falschen Aussage, deshalb sind die Intervallgrenzen der Lösungsmenge offen.

Arbeitsmethode zur Lösung quadratischer Ungleichungen:
1. Zeichne den Graphen.
2. Markiere passende Graphenabschnitte.
3. Bestimme für x die passenden Intervalle.

Aufgaben

39. Bestimme für die folgenden Funktionsgleichungen die Scheitelpunkte und (falls möglich) die Nullstellen der zugehörigen Graphen.

a) $f(x) = x^2 - 25$ b) $f(x) = x^2 - 1$

c) $f(x) = x^2 + 9$ d) $f(x) = x^2 + 18$

e) $f(x) = x^2 - 8$ f) $f(x) = x^2 - 3$

g) $f(x) = (x - \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2})$ h) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 2\right) \cdot (x + 4) \cdot 2$

40. Eine in y-Richtung verschobene Normalparabel enthält den Punkt P. Bestimme die zugehörige Funktionsgleichung, den Scheitelpunkt und die Nullstellen (falls vorhanden).

a) $P(0|5)$ b) $P(0|-2)$

c) $P(1|3)$ d) $P(2|4)$

e) $P(-2|-3)$ f) $P(6|8)$

41. Löse zeichnerisch unter Angabe eines Intervalls die folgenden Ungleichungen.

a) $x^2 - 5 > 0$ b) $x^2 - 2 \le 0$

c) $x^2 \le 3$ d) $-x^2 > -2$

e) $2 \cdot (x - 2) \cdot \left(\frac{1}{2}x + 1\right) < 0$ f) $(x + 1) \cdot (x - 1) \le 0$

g) $(x - 2)^2 \le -4x$ h) $(-x - 1) \cdot (-x + 1) \ge 0$

k) $\dfrac{x^4-1}{x^2y^3-y^3x^4}=\dfrac{(x^2)^2-1^2}{x^2y^3\cdot(1-x^2)}=\dfrac{(x^2-1)\cdot(x^2+1)}{x^2y^3\cdot(1-x^2)}$

$=\dfrac{-(1-x^2)\cdot(x^2+1)}{x^2y^3\cdot(1-x^2)}=\mathbf{-\dfrac{x^2+1}{x^2y^3}}$

l) $\dfrac{(x-3y)^2}{(3y-x)^2}=\dfrac{(x-3y)\cdot(x-3y)}{(3y-x)\cdot(3y-x)}=\dfrac{-(3y-x)\cdot(x-3y)}{(3y-x)\cdot(3y-x)}=-\dfrac{x-3y}{3y-x}$

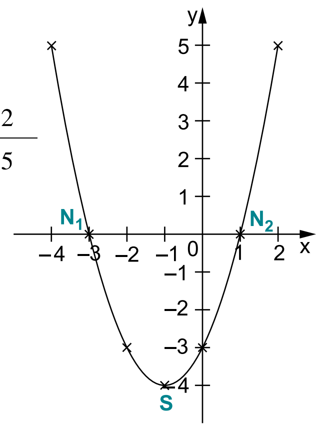
$=-\dfrac{-(3y-x)}{3y-x}=\dfrac{3y-x}{3y-x}=\mathbf{1}$

37. a) $f(x)=x^2+2x-3;\quad [-4;2]$

Wertetabelle:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2
y	5	0	–3	–4	–3	0	5

Herausgelesen aus dem Graphen:
$\mathbf{S(-1|-4);\ N_1(-3|0);\ N_2(1|0)}$

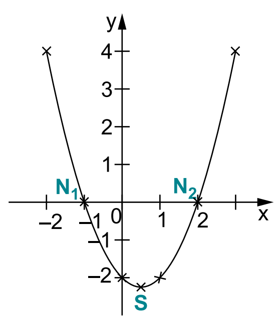


b) $f(x)=x^2-x-2;\quad [-2;3]$

Wertetabelle:

x	–2	–1	0	1	2	3
y	4	0	–2	–2	0	4

Herausgelesen aus dem Graphen:
$\mathbf{S\left(\frac{1}{2}\middle|-2\frac{1}{4}\right);\ N_1(-1|0);\ N_2(2|0)}$

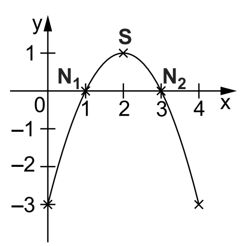


c) $f(x)=-x^2+4x-3;\quad [0;4]$

Wertetabelle:

x	0	1	2	3	4
y	–3	0	1	0	–3

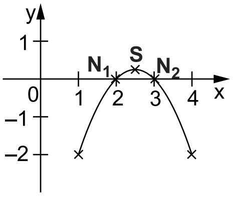
Herausgelesen aus dem Graphen:
$\mathbf{S(2|1);\ N_1(1|0);\ N_2(3|0)}$



d) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$; [1; 4]

Wertetabelle:

x	1	2	3	4	2,5
y	–2	0	0	–2	0,25



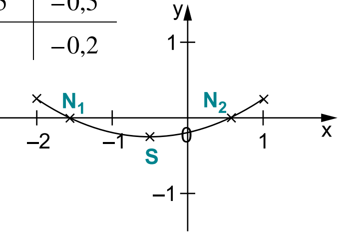
Herausgelesen aus dem Graphen:

$S(2{,}5 \mid 0{,}25)$; $N_1(2 \mid 0)$; $N_2(3 \mid 0)$

e) $f(x) = 0{,}2x^2 + 0{,}2x - 0{,}15$; [–2; 1]

Wertetabelle:

x	–2	–1	0	1	0,5	–0,5
y	0,25	–0,15	–0,15	0,25	0	–0,2



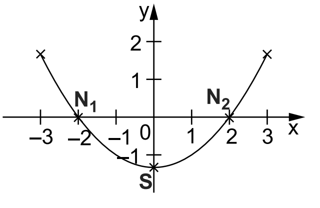
Herausgelesen aus dem Graphen:

$S(-0{,}5 \mid -0{,}2)$;
$N_1(-1{,}5 \mid 0)$; $N_2(0{,}5 \mid 0)$

f) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}$; [–3; 3]

Wertetabelle:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	$1\frac{2}{3}$	0	–1	$-\frac{4}{3}$	–1	0	$1\frac{2}{3}$



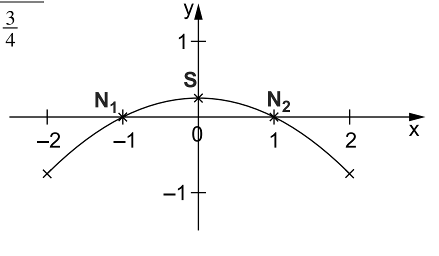
Herausgelesen aus dem Graphen:

$S\left(0 \,\middle|\, -\frac{4}{3}\right)$; $N_1(-2 \mid 0)$; $N_2(2 \mid 0)$

g) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$; [–2; 2]

Wertetabelle:

x	–2	–1	0	1	2
y	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$



Herausgelesen aus dem Graphen:

$S\left(0 \,\middle|\, \frac{1}{4}\right)$; $N_1(-1 \mid 0)$; $N_2(1 \mid 0)$

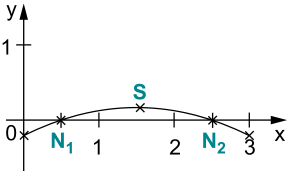
h) $f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{24}$; [0; 3]

Wertetabelle:

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	$-\frac{5}{24}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{5}{24}$

Herausgelesen aus dem Graphen:

$\mathbf{S\left(1{,}5 \,\middle|\, \frac{1}{6}\right);\ N_1(0{,}5\,|\,0);\ N_2(2{,}5\,|\,0)}$



38. a) $f(x) = -3x^2 + 5x - 2$
$= \mathbf{-3}x^2 + \mathbf{5}x + (\mathbf{-2})$

Dies ist eine quadratische Funktion mit a = –3, b = 5 und c = –2.

b) $f(x) = -1{,}5 + 15{,}3x - \frac{1}{2}x^2$ Sortieren nach Exponenten von x

$= -\frac{1}{2}x^2 + 15{,}3x - 1{,}5$

$= \mathbf{-\frac{1}{2}}x^2 + \mathbf{15{,}3}x + (\mathbf{-1{,}5})$

Dies ist eine quadratische Funktion mit $a = -\frac{1}{2}$, $b = 15{,}3$ und $c = -1{,}5$.

c) $f(x) = (2x - 3) \cdot (1 - x)$ Ausmultiplizieren
$= 2x - 2x^2 - 3 + 3x$ Sortieren nach Exponenten von x
$= -2x^2 + 5x - 3$
$= \mathbf{-2}x^2 + \mathbf{5}x + (\mathbf{-3})$

Dies ist eine quadratische Funktion mit a = –2, b = 5 und c = –3.

d) $f(x) = 7x - \frac{1}{3} + 2x^2 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}x$ Sortieren nach Exponenten von x

$= 2x^2 + 7x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$

$= 2x^2 + 6\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$

$= \mathbf{2}x^2 + \mathbf{6\frac{2}{3}}x + \left(\mathbf{-\frac{1}{2}}\right)$

Dies ist eine quadratische Funktion mit $a = 2$, $b = 6\frac{2}{3}$ und $c = -\frac{1}{2}$.

e) $f(x)=\left(-\frac{1}{2}x-1\right)\cdot\frac{1}{3}x+7$ Ausmultiplizieren

$$=-\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{3}x-1\cdot\frac{1}{3}x+7$$

$$=-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{3}x+7$$

$$=\mathbf{-\frac{1}{6}}\cdot x^2+\left(\mathbf{-\frac{1}{3}}\right)\cdot x+\mathbf{7}$$

Es handelt sich um eine quadratische Funktion mit $a=-\frac{1}{6}$, $b=-\frac{1}{3}$ und $c=7$.

f) $f(x)=(2x+1)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)-2x^2$ Ausmultiplizieren

$$=2x^2-2x\cdot\frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}-2x^2$$

$$=-\frac{1}{2}$$

Die Funktion ist eine konstante und deshalb **nicht quadratisch**.

g) $f(x)=\frac{\left(2-\frac{1}{3}x\right)\cdot\left(\frac{1}{x}+x\right)}{3}$ Ausmultiplizieren

$$=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{2}{x}+2x-\frac{1}{3}\frac{x}{x}-\frac{1}{3}x\cdot x\right]$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{2}{x}+2x-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x^2\right]$$ Sortieren nach Exponenten von x

$$=\frac{1}{3}\cdot\left[-\frac{1}{3}x^2+2x-\frac{1}{3}+\frac{2}{x}\right]$$

$$=-\frac{1}{9}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}$$

Die Funktion ist wegen des Summanden $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}$ **nicht quadratisch**.

h) $f(x)=\frac{(x+3)\cdot(x-2)\cdot(x+1)}{(x+1)}$

Für $x=-1$ hat der Nenner den Wert null.
$x=-1$ darf deshalb nicht eingesetzt werden.
$(x+1)$ wird gekürzt.

$$=(x+3)\cdot(x-2)$$

$$=x^2-2x+3x-6$$

$$=x^2+x-6$$

$$=\mathbf{1}\cdot x^2+\mathbf{1}\cdot x+(\mathbf{-6})$$

Es handelt sich für $x\neq 1$ um eine quadratische Funktion mit $a=1$, $b=1$ und $c=-6$.