GYMNASIUM · GESAMTSCHULE

MEHR ERFAHREN

KLASSENARBEIT

Mathematik 10. Kla

HENSE · REINECKE

STARK

Inhalt

Autoren: Sebastian Hense, Peter Reinecke

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses Buch bereitet dich auf die Klassenarbeiten, die im Laufe der Jahrgangsstufe 10 von dir geschrieben werden, vor.
Die Inhalte des Mathematikunterrichts sind in der folgenden Tabelle aufgeführt:

Themenbereich 1	**Funktionen:** • Lineare Funktionen • Quadratische Funktionen **Arithmetik/Algebra:** • Gleichungen lösen
Themenbereich 2	**Funktionen:** • Potenzfunktionen • Wurzelfunktionen • Trigonometrische Funktionen
Themenbereich 3	**Funktionen:** • Exponentielles Wachstum **Arithmetik/Algebra:** • Logarithmen
Themenbereich 4	**Differenzialrechnung und Funktionsuntersuchung:** • Untersuchung ganzrationaler Funktionen • Ableitungsbegriff • Grenzwerte
Themenbereich 5	**Geometrie:** • Koordinatengeometrie • Kreis, Kreistangente • Strahlensatz
Themenbereich 6	**Stochastik:** • Mehrstufige Zufallsexperimente • Bedingte Wahrscheinlichkeit • Vierfeldertafel

Zu den sechs Themenbereichen findest du jeweils mehrere beispielhafte Klassenarbeiten.

- Zu allen Aufgaben gibt es **ausführliche und kommentierte Lösungen**.
  Einige dieser Aufgaben wurden zum Teil mit einem **GTR** gelöst. Ein **CAS** kann in ähnlicher Weise eingesetzt werden. Wer möchte, kann sich aber auch stets handschriftlich an den Lösungen versuchen.

- Kommst du bei einer Aufgabe einmal nicht weiter oder fällt dir der Einstieg in eine Aufgabe schwer, helfen dir **Hinweise und Tipps**, den richtigen Ansatz zu finden. Diese kannst du jeweils zwischen Angabe und Lösung nachschlagen.

- Die Aufgaben sind in drei **Schwierigkeitsstufen** gegliedert:

  einfach

  mittel

  schwer

- Unter jeder Aufgabenstellung steht die **Gesamtzeit**, auf die eine Klassenarbeit angesetzt ist. Dort kannst du auch eintragen, wie lange du für das eigenständige Lösen einer Arbeit insgesamt gebraucht hast. Stoppe die Zeit, vergleiche die Werte und schätze dich damit selbst ein.

- In der Lösung findest du darüber hinaus **Zeitangaben** für jede Einzelaufgabe. Somit weißt du, wie die Gesamtzeit auf die Aufgaben einer Arbeit verteilt ist. Dann siehst du, wo du noch schneller werden musst oder ob du bereits mit der gegebenen Zeit gut auskommst.

- Bei jeder Klassenarbeit ist ein individueller **Bewertungsschlüssel** angegeben, mit dem du deine von dir erreichten Bewertungseinheiten (BE) einer **Note** zuordnen kannst. So kannst du gut erkennen, in welchen Bereichen du noch gezielt üben musst.

Wenn du gewissenhaft mit diesem Buch arbeitest, kannst du deinen aktuellen Leistungsstand rasch realistisch einschätzen.

Wir wünschen dir viel Erfolg bei der Vorbereitung auf deine Klassenarbeiten.

Sebastian Hense

Peter Reinecke

Klassenarbeit 4

BE

1 Vereinfache die Terme so weit wie möglich.

a) $\frac{c^3}{c^4 + 3c^4}$ 2

b) $\left(\frac{4a^5}{3b^2c^{-3}}\right) \cdot \left(\frac{9a^{-9}b^{-3}}{8c}\right)$ 2

c) $\frac{(x+y)^5}{x^2 + 2xy + y^2}$ 2

d) $\frac{(x^3y^2)^3 + y^6}{y^4}$ 2

2 Ordne den Graphen die Funktionsgleichungen zu und begründe deine Zuordnung.

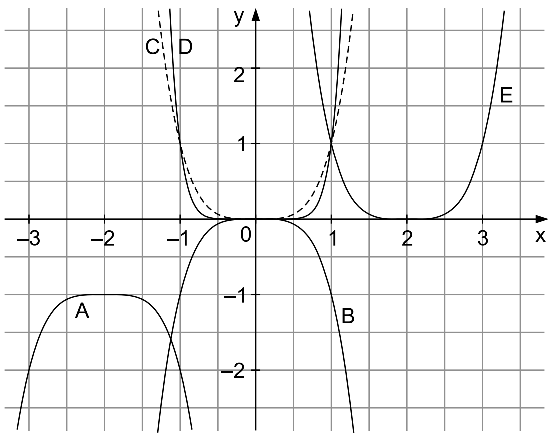
$f(x) = x^4$

$g(x) = x^8$

$h(x) = -(x+2)^4 - 1$

$i(x) = (x-2)^4$

$k(x) = -x^4$



10

3 Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^5$ und $g(x) = x^3$.

a) Fertige eine Skizze an. Benutze den GTR und übertrage in dein Heft. 2

b) Beschreibe und erläutere die Unterschiede zwischen beiden Graphen. 4

c) Der Graph der Funktion g wird um 3 Einheiten nach rechts und 2 Einheiten nach oben verschoben. Veranschauliche dies in der Skizze aus Teil a und gib die Funktionsgleichung der verschobenen Funktion h an. 4

d) Gegeben ist nun die Funktionenschar $f_a(x) = (x+a)^3 + a$ mit $-3 \leq a \leq 3$. Beschreibe die Veränderung des Graphen, wenn a schrittweise von –3 bis 3 wächst. Benutze dazu den GTR. 4

4 Ein Quader mit der Breite a ist 2-mal so tief und 4-mal so hoch wie breit.

a) Skizziere und beschrifte den Quader. 2

b) Die Funktion O mit $O(a) = 28a^2$ gibt in Abhängigkeit von a die zugehörige Oberfläche an. Leite die Funktionsgleichung schrittweise her. 2

c) Leite eine Funktionsgleichung V(a) für das Volumen des Quaders in Abhängigkeit von a her. 2

d) Fertige eine Skizze für die Funktion aus Teilaufgabe c an. Benutze den GTR und übertrage die Skizze in dein Heft. 2

e) Begründe, warum die Funktion aus Teilaufgabe c nur für positive Werte für a zur Modellierung benutzt werden kann. 2

f) Berechne den Oberflächeninhalt eines Quaders mit einem Volumen von 216 dm^3. Gib auch Breite, Tiefe und Höhe an. 6

g) Erläutere allgemein die Veränderung der Oberfläche und des Volumens, wenn die Breite des Quaders verdoppelt bzw. gedrittelt wird. 6

5 Gegeben: $f(x) = x^{-2}$, $g(x) = x^{-3}$ und $h(x) = 8 - x^{-3}$. Kreuze an und begründe.

		wahr	falsch
1	Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.	☐	☐
2	Der Graph von g verläuft durch den Punkt P(0,1 | 1 000).	☐	☐
3	Der Graph von h schneidet die x-Achse nur bei $x = 0{,}5$.	☐	☐
4	Die Graphen von f und g schneiden sich im Punkt P(1 | 1).	☐	☐
5	Die Graphen von g und h schneiden sich nicht.	☐	☐

15

6 Bestimme die Lösungsmenge folgender Potenzgleichungen.

a) $x^3 = -8$ 2

b) $x^4 - 16 = 0$ 2

c) $x^6 = x^4$ 4

d) $0{,}5 \cdot (x+1)^3 = 32$ 3

So lange habe ich gebraucht: __________ / 90 min

So viele BE habe ich erreicht: __________ / 80 BE

Note	1	2	3	4	5	6
BE	80 – 70	69 – 58	57 – 47	46 – 36	35 – 15	14 – 0

Hinweise und Tipps

1
- Fasse gleichartige Terme zusammen.
- Wende Potenzgesetze an.
- Faktorisiere im Zähler.
- Vereinfache mithilfe der binomischen Formeln.

2
- Lies jeweils den Scheitelpunkt der Parabel ab.
- Vergleiche ihn mit den Funktionsgleichungen.
- Beachte evtl. auch das Öffnungsverhalten der Parabeln.

3
- Wähle einen passenden Maßstab.
- Achte auf gemeinsame Punkte und den Verlauf der Graphen.
- Nutze Analogien zu Funktionen mit geradzahligem Exponenten.
- Überlege, welchen Einfluss eine Verschiebung in x-Richtung bzw. in y-Richtung auf den Funktionsterm hat.
- Nutze zur Verlaufsbeschreibung der Graphen der Kurvenschar deine Überlegungen aus Teilaufgabe c.
- Nutze zur Kontrolle den GTR.

4
- Zeichne den Quader und beschrifte ihn mit den gegebenen Größen.
- Nutze die Oberflächengleichung eines Quaders aus der Mittelstufe. Setze in diese die gegebenen Bedingungen ein und vereinfache den Term.
- Beachte einen geeigneten Maßstab.
- Der Funktionswert von $V(a)$ entspricht dem Volumen des Quaders.
- Berechne in Teilaufgabe f im 1. Schritt die Länge a. Setze diese in die Gleichungen zur Berechnung der Oberfläche, Breite und Höhe ein.
- Nutze die allgemeinen Gleichungen und denke an die Abhängigkeit der Länge zum Oberflächeninhalt bzw. zum Volumen des Quaders.

5
- Achsensymmetrie zur y-Achse: $f(x) = f(-x)$
- Setze in die Funktionsgleichung ein.
- Bestimme den Schnittpunkt mit der x-Achse.
- Berechne den Schnittpunkt beider Graphen.

6
- Verwende den Zusammenhang zwischen Potenzieren und Radizieren.
- Beachte die Anzahl der Lösungen.
- Faktorisiere zuerst, wenn möglich.
- Eliminiere Klammern.

Lösung

BE

1 a) 2 Minuten,

$$\frac{c^3}{c^4+3c^4}=\frac{c^3}{4c^4}=\frac{1}{4c}$$ 2

b) 3 Minuten,

$$\left(\frac{4a^5}{3b^2c^{-3}}\right)\cdot\left(\frac{9a^{-9}b^{-3}}{8c}\right)=\frac{4a^5\cdot 9\cdot c^3}{3b^2\cdot 8c\cdot a^9\cdot b^3}=\frac{3c^2}{2a^4b^5}$$ 2

c) 3 Minuten,

$$\frac{(x+y)^5}{x^2+2xy+y^2}=\frac{(x+y)^5}{(x+y)^2}=(x+y)^3$$ 2

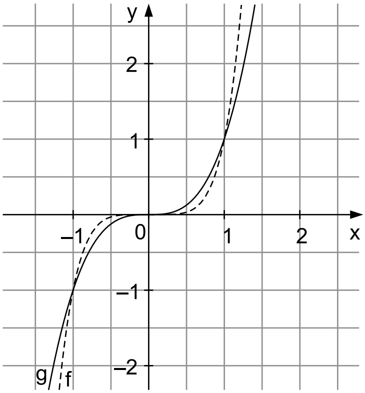
d) 3 Minuten,

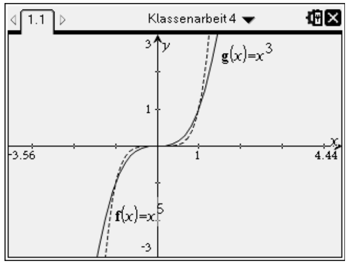
$$\frac{(x^3y^2)^3+y^6}{y^4}=\frac{x^9y^6+y^6}{y^4}=\frac{\cancel{y^4}\,(x^9y^2+y^2)}{\cancel{y^4}}=y^2x^9+y^2$$ 2

2 9 Minuten, /

Abbildung	Funktion	Begründung	BE
C	f(x)	• nach oben geöffnet • S(0 | 0) • weiter als Schaubild D	2
D	g(x)	• nach oben geöffnet • S(0 | 0) • enger als Schaubild C	2
A	h(x)	• nach unten geöffnet • S(–2 | –1)	2
E	i(x)	• nach oben geöffnet • S(2 | 0)	2
B	k(x)	• nach unten geöffnet • S(0 | 0)	2

3 a) 6 Minuten,

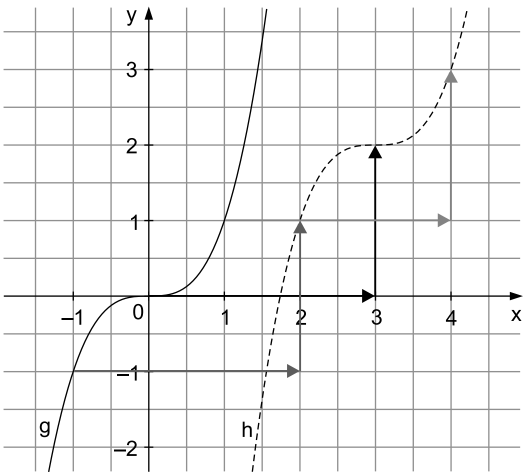




2

b) 4 Minuten,
Die Parabeln 3. bzw. 5. Ordnung unterscheiden sich hinsichtlich ihrer „Steilheit“. Im Intervall $0 < x < 1$ liegen die Funktionswerte von f unterhalb derer von g. Erst nach dem Schnittpunkt $(1 \mid 1)$ liegen die Funktionswerte von f oberhalb von g.
Aus Symmetriegründen (Punktsymmetrie) ist der Verlauf der Funktionsgraphen für $x < 0$ genau umgekehrt. 4

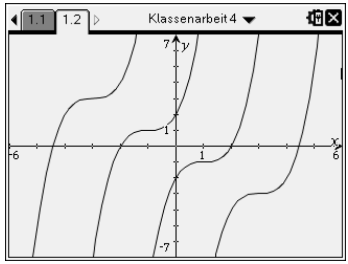
c) 5 Minuten, /



2

$h(x) = (x-3)^3 + 2$ 2

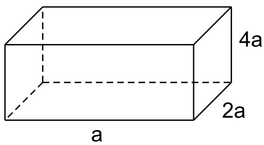
d) 6 Minuten, /
In der Funktionenschar kommt der Parameter a an 2 Stellen vor:
- Klammerterm: a bewirkt eine Verschiebung in x-Richtung. 2
- Außerhalb: a bewirkt eine Verschiebung in y-Richtung. 2



Also:

$$f_a(x) = \underbrace{(x+a)^3}_{\text{Verschiebung in x-Richtung}} + \underbrace{a}_{\text{Verschiebung in y-Richtung}}$$

4 a) 2 Minuten,



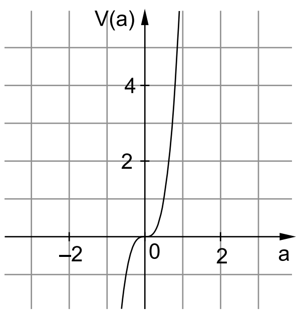
Es ist nur eine Skizze verlangt. Diese muss nicht maßstabsgetreu sein. 2

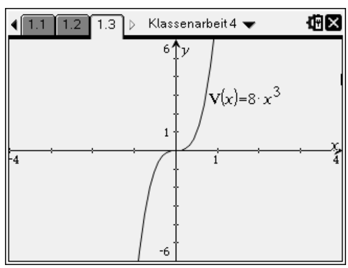
b) 4 Minuten,
$O = 2 \cdot (ab + ac + bc)$

Mit $a = a$, $b = 2a$ und $c = 4a$ folgt:
$O = 2 \cdot (a \cdot 2a + a \cdot 4a + 2a \cdot 4a) = 2 \cdot (2a^2 + 4a^2 + 8a^2) = 2 \cdot 14a^2 = 28a^2$ 2

c) 3 Minuten,
$V = a \cdot b \cdot c = a \cdot 2a \cdot 4a = 8a^3$ 2

d) 5 Minuten, /
Man fasse V als die Funktion $V(a) = 8a^3$ auf.





2

e) 3 Minuten,
Zur Modellierung der Funktion V(a) kommen nur positive Werte a in Betracht, da hier ein geometrisches Problem als Ausgangspunkt gegeben ist. Hier macht ein negatives Ergebnis (für das Volumen), was dem Funktionswert entsprechen würde, keinen Sinn. 2

f) 5 Minuten, /

$V = 8 \cdot a^3$ durch 8 dividieren

$a^3 = \frac{V}{8}$ 3. Wurzel ziehen

$a = \sqrt[3]{\frac{V}{8}}$ gegebenen Wert für V einsetzen

$a = \sqrt[3]{\frac{216\ \text{dm}^3}{8}}$

$a = 3\ \text{dm}$ 2

$b = 2a = 2 \cdot 3\ \text{dm} = 6\ \text{dm}$ 1

$c = 4a = 4 \cdot 3\ \text{dm} = 12\ \text{dm}$ 1

$O = 28a^2 = 28 \cdot (3\ \text{dm})^2 = 252\ \text{dm}^2$ 2

g) 6 Minuten, /

Verdopplung

- Aus der Gleichung $O = 28a^2$ folgt, dass O proportional zu a^2 ist. Bei Verdopplung der Breite folgt eine Vervierfachung der Oberfläche. Aus $O = 28a^2$ wird $O = 28 \cdot (2a)^2 = 4 \cdot 28a^2$. 2

  Veränderung um Faktor 4

- Aus der Gleichung $V = 8a^3$ folgt die Proportionalität von V und a^3. Bei Verdopplung der Breite folgt eine Verachtfachung des Volumens. Aus $V = 8a^3$ wird $V = 8 \cdot (2a)^3 = 8 \cdot 8a^3$. 2

  Veränderung um Faktor 8

Drittelung

- O ist $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ der Ausgangsoberfläche. 1
- V ist $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ des Ausgangsvolumens. 1

5 13 Minuten, /

1. Aussage

$$f(x) = f(-x)$$
$$x^{-2} = (-x)^{-2}$$
$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{(-x)^2} \quad ✓ \Rightarrow$$ **wahre** Aussage 3

2. Aussage

$$g(0{,}1) = \frac{1}{0{,}1^3} = 1\,000 \quad ✓ \Rightarrow$$ **wahre** Aussage 3

3. Aussage

$$h(x) = 0$$
$$8 - x^{-3} = 0$$ 8 subtrahieren
$$-\frac{1}{x^3} = -8$$ mit (–1) multiplizieren
$$\frac{1}{x^3} = 8$$ als Kehrbruch schreiben
$$x^3 = \frac{1}{8}$$ 3. Wurzel ziehen
$$x = \frac{1}{2} \quad ✓ \Rightarrow$$ **wahre** Aussage 3

4. Aussage

$$f(x) = g(x)$$
$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3}$$ mit x^3 multiplizieren
$$x = 1$$
$$f(1) = 1 \quad ✓ \Rightarrow$$ **wahre** Aussage 3

5. Aussage

$$g(x) = h(x)$$
$$\frac{1}{x^3} = 8 - \frac{1}{x^3}$$ $\frac{1}{x^3}$ addieren
$$\frac{2}{x^3} = 8$$ als Kehrbruch schreiben

$\frac{x^3}{2} = \frac{1}{8}$ mit 2 multiplizieren

$x^3 = \frac{1}{4}$ 3. Wurzel ziehen

$x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ 2

$x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ ist eine eindeutige Lösung $\Rightarrow$ Es gibt 1 Schnittpunkt.

$\Rightarrow$ **falsche** Aussage 1

6 a) 1 Minute,

$x^3 = -8$ 3. Wurzel ziehen

$x = -2$ 2

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{-2\}$

b) 2 Minuten,

$x^4 - 16 = 0$ 16 addieren

$x^4 = 16$ 4. Wurzel ziehen

$\Rightarrow$ $x_1 = 2$ oder $x_2 = -2$ 2

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{-2; 2\}$

c) 2 Minuten,

$x^6 = x^4$ x^4 subtrahieren

$x^6 - x^4 = 0$ x^4 ausklammern

$x^4(x^2 - 1) = 0$ 2

$\Rightarrow$ $x_1 = 0$ oder $x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x_2 = 1$ oder $x_3 = -1$ 2

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{-1; 0; 1\}$

d) 3 Minuten,

$0{,}5 \cdot (x+1)^3 = 32$ mit 2 multiplizieren

$(x+1)^3 = 64$ 3. Wurzel ziehen

$x + 1 = 4$ 1 subtrahieren

$x = 3$ 3

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{3\}$