MEHR ERFAHREN

TRAINING

Gymnasium

Algebra
Fit für die Oberstufe

STARK

Inhalt

Vorwort

1 Zahlmengen, Variablen, Terme **1**
1.1 Die Zahlmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ 1
1.2 Rechnen mit reellen Zahlen 3
1.3 Variablen und Terme 7
1.4 Elementare Termumformungen 10

2 Rechnen mit Klammern **15**
2.1 Auflösen von Klammern 15
2.2 Binomische Formeln 17
2.3 Faktorisieren 20

3 Bruchterme **25**
3.1 Grund- und Definitionsmenge 25
3.2 Vereinfachen von Bruchtermen 28
3.3 Bruchterme mit mehreren Variablen 31
3.4 Polynomdivision 32

4 Gleichungen **35**
4.1 Lösen von Gleichungen 35
4.2 Lineare Gleichungen 40
4.3 Quadratische Gleichungen 42
4.4 Bruchgleichungen 46
4.5* Gleichungen mit Parametern 49
4.6 Lineare Gleichungssysteme 52
4.7* Lineare Gleichungssysteme mit Parameter 61

5 Ungleichungen **65**
5.1 Lineare Ungleichungen 65
5.2 Bruchungleichungen 67
5.3* Ungleichungen mit Parameter 70

6 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen **73**
6.1 Potenzregeln 73
6.2 Rechnen mit Wurzeln 76
6.3 Der Logarithmus 80

7 Funktionen **83**
7.1 Eigenschaften und Darstellung von Funktionen 83
7.2 Lineare Funktionen 89

7.3 Quadratische Funktionen 96
7.4 Potenzfunktionen 102
7.5 Exponentialfunktionen 106
7.6* Trigonometrische Funktionen 108

8* Umkehrfunktionen 119
8.1 Bildung von Umkehrfunktionen 119
8.2 Wurzelfunktionen 123
8.3 Logarithmusfunktionen 126

9 Spezielle Gleichungen und Ungleichungen 131
9.1 Betragsgleichungen und -ungleichungen 131
9.2 Quadratische Ungleichungen 134
9.3* Wurzelgleichungen 136
9.4 Potenzgleichungen 137
9.5 Exponential- und Logarithmusgleichungen 142
9.6* Trigonometrische Gleichungen 144
9.7 Gleichungslösen mittels Substitution 147

10 Aufgabenmix 151

Lösungen 157

Autor: Eberhard Endres

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

beim Erlernen einer Fremdsprache spielen Vokabeln und Grammatik eine entscheidende Rolle. Mithilfe der Grammatik werden Vokabeln zu sinnvollen Sätzen kombiniert. Darüber hinaus gestattet die Grammatik in gewissen Grenzen das Umstellen einzelner Satzglieder eines Satzes.

Auch in der Algebra spielen diese Begriffe eine wesentliche Rolle: Die mathematischen Vokabeln sind dabei die Fachbegriffe (z. B. Variable, Term, Gleichung) und die Grammatik wird durch entsprechende mathematische Regeln (z. B. Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz) gebildet. Wie beim Umstellen der Satzglieder eines Satzes in der Fremdsprache hilft die „mathematische Grammatik" auch bei der Umwandlung von mathematischen Aussagen in gleichwertige Aussagen (z. B. beim Lösen einer Gleichung). Ziel dieses Buches ist es, die wichtigsten mathematischen Vokabeln (Definitionen) zu erläutern und das erforderliche mathematische Grammatikgerüst (mathematische Regeln) aufzufrischen.

Dieser Band beschäftigt sich mit den fundamentalen **in der Algebra benötigten Regeln und Rechentechniken** und dient dazu, den in der Unter- und Mittelstufe behandelten Stoff zu wiederholen und zu festigen. Das Buch vermittelt die **grundlegenden Algebra-Kenntnisse**, die in der Oberstufe des Gymnasiums vorausgesetzt werden. Daneben wird auch ein Blick auf das eng mit der Algebra verknüpfte Gebiet der **Funktionen** geworfen, die ebenfalls zentrale Bedeutung im Oberstufenstoff besitzen und bei denen die erworbenen Algebrakenntnisse angewandt werden.

Einige Kapitel dieses Bandes gehen dabei in Maßen über die unumgänglichen Grundkenntnisse für die Oberstufe hinaus und müssen nicht unbedingt bis in das letzte Detail beherrscht werden; diese Kapitel sind im Inhaltsverzeichnis mit einem Stern (*) versehen. Wenn Sie Ihr Verständnis für Termumformungen aber auf einem über den reinen Schulstoff hinaus gehenden Niveau festigen möchten, dann sei Ihnen die gründliche Bearbeitung auch dieser Kapitel empfohlen.

Jedes Kapitel enthält zu Beginn in prägnanter Form die wesentlichen Sachverhalte, die danach ausführlich erläutert und in **Beispielaufgaben** vorgeführt werden. Anschließend werden **Übungsaufgaben** gestellt, deren **Lösungen** im Lösungsteil **in schülergerechter Form** und mit weiteren Hinweisen dargestellt sind.

Das letzte Kapitel enthält für Ihre **Selbstkontrolle** nach der Bearbeitung des Buches in bunter Mischung Aufgaben aus den vorangegangenen Kapiteln.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg bei der Festigung Ihrer mathematischen Kompetenzen!

Eberhard Endres

30. Multiplizieren Sie die Terme aus:

a) $(a+2)^3$ b) $(x-4y)^3$

c) $(2x-3y)^3$ d) $(2x-1)^4$

e) $(a-5)^4$ f) $(x+1)^5$

2.3 Faktorisieren

Im Gegensatz zum zuvor besprochenen Ausmultiplizieren, bei dem ein Produkt in eine Summe umgewandelt wird, wird beim Faktorisieren eine Summe in ein Produkt umgewandelt.
Um eine Summe in ein Produkt umzuwandeln, geht man folgendermaßen vor:

1. Zunächst sucht man **gemeinsame Faktoren** und klammert diese aus.
2. Man überprüft, ob eine der **binomischen Formeln** „von rechts nach links" angewandt werden kann.
3. Man testet, ob der **Satz des Vieta** anwendbar ist.

Regel

> **Satz des Vieta:** Wenn sich der Term x^2+px+q in ein Produkt der Form $(x+a)\cdot(x+b)$ verwandeln lässt, dann muss für a und b gelten:
>
> $\mathbf{a+b=p}$ **und** $\mathbf{a\cdot b=q}$

Dieser Satz kann begründet werden, indem man den Term $(x+a)\cdot(x+b)$ ausmultipliziert:
$(x+a)\cdot(x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+\mathbf{(a+b)}\cdot x+\mathbf{a\cdot b}$
Anschließend vergleicht man das Ergebnis mit $x^2+\mathbf{p}x+\mathbf{q}$ und erhält:
$a+b=p$ und $a\cdot b=q$.

4. Man versucht, die Summanden so zu **gruppieren**, dass in jeder Gruppe nach dem Ausklammern derselbe Term übrig bleibt. Diesen gemeinsamen Term kann man anschließend nochmals ausklammern.
5. Zuletzt gibt es noch das Verfahren der **Polynomdivision**, das in Abschnitt 3.4 erläutert wird.

Beispiele

1. **Gemeinsamer Faktor:** $25r^2s-20rs^2+15r^2s^2=?$
   In allen Summanden lässt sich der Faktor 5rs ausklammern:
   $25r^2s-20rs^2+15r^2s^2=5rs\cdot(5r-4s+3rs)$

2. **Binomische Formel:** $x^2 - 18x + 81 = ?$
   Wenn eine binomische Formel verwendet werden kann, dann wegen der drei Summanden und der Vorzeichen nur die 2. binomische Formel.
   Durch Vergleich mit $a^2 - 2ab + b^2$

   $$\begin{array}{ccc} x^2 & -\ 18x & +\ 81 \\ {\scriptstyle a^2 = x^2}\ \big\updownarrow & & \big\updownarrow\ {\scriptstyle b^2 = 81} \\ a^2 & -\ 2ab & +\ b^2 \end{array}$$

   erhält man $x = a$ und $b = 9$ und somit $x^2 - 18x + 81 = (x - 9)^2$. Die Überprüfung des mittleren Summanden, $-2ab = -2 \cdot x \cdot 9 = -18x$, bestätigt die Korrektheit der Umformung.

3. $25a^4 + 40a^2bc + 16b^2c^2 = ?$
   Da hier die Variablen a und b bereits verwendet sind, muss die infrage kommende **1. binomische Formel** in der Form $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ verwendet werden. Vergleich des ersten

   $$\begin{array}{ccc} 25a^4 & +\ 40a^2bc & +\ 16b^2c^2 \\ {\scriptstyle 25a^4 = x^2}\ \big\updownarrow & & \big\updownarrow\ {\scriptstyle 16b^2c^2 = y^2} \\ x^2 & +\ 2xy & +\ y^2 \end{array}$$

   und dritten Summanden ergibt hier $25a^4 = x^2$, also $x = 5a^2$ bzw. $16b^2c^2 = y^2$, also $y = 4bc$. Somit erhält man $25a^4 + 40a^2bc + 16b^2c^2 = (5a^2 + 4bc)^2$. Auch hier bestätigt die Überprüfung des mittleren Summanden die Richtigkeit der Umformung: $2xy = 2 \cdot 5a^2 \cdot 4bc = 40a^2bc$.

4. $k^4 - 9z^4 = ?$
   Hier kommt nur die **3. binomische Formel** in Betracht. Der Vergleich mit $a^2 - b^2$ liefert $a = k^2$ und $b = 3z^2$ und daher $k^4 - 9z^4 = (k^2 + 3z^2) \cdot (k^2 - 3z^2)$.

5. $r^2 + 3rs + 4s^2 = ?$
   Der erste und dritte Summand lassen vermuten, dass durch Vergleich mit der **1. binomischen Formel** aus dem Term $a^2 + 2ab + b^2$ sofort $a = r$ und $b = 2s$ folgt. Leider stimmt aber dann

   $$\begin{array}{ccc} r^2 & +\ 3rs & +\ 4s^2 \\ {\scriptstyle r^2 = a^2}\ \big\updownarrow & & \big\updownarrow\ {\scriptstyle 4s^2 = b^2} \\ a^2 & +\ 2ab & +\ b^2 \end{array}$$

   $2ab = 2 \cdot r \cdot 2s = 4rs$ nicht mit dem vorgegebenen mittleren Summanden 3rs überein. Der Term $r^2 + 3rs + 4s^2$ lässt sich **nicht** in ein Produkt verwandeln (abgesehen von $r^2 + 3rs + 4s^2 = 1 \cdot (r^2 + 3rs + 4s^2)$ oder ähnlichem).

6. **Satz des Vieta:** $x^2 + 7x + 12 = ?$
   Dieser Term kann in der Form $(x + a) \cdot (x + b)$ faktorisiert werden. Dabei muss aber $a + b = 7$ und $a \cdot b = 12$ gelten. Dies ist – wenn überhaupt – nur für positive Zahlen a und b möglich. Spielt man die verschiedenen Möglichkeiten für a und b durch, deren Produkt 12 ergibt, und filtert diejenigen Kombinationen heraus, deren Summe auch noch 7 ergibt (siehe Tabelle), dann erhält man $a = 4$ und $b = 3$ (oder umgekehrt) und somit $x^2 + 7x + 12 = (x + 4) \cdot (x + 3)$.

a	b	a + b
1	12	13
2	6	8
3	**4**	**7**
4	**3**	**7**
6	2	8
12	1	13

7. $x^2 - 2x - 15 = ?$
Auch hier muss zur Umwandlung in ein Produkt der Form $(x+a)\cdot(x+b)$ mithilfe des **Satzes von Vieta** gelten: $a+b=-2$ und $a\cdot b=-15$. Ein Faktor muss negativ sein, der andere positiv. Bezeichnet man den positiven Faktor mit a, den negativen Faktor mit b und spielt man wieder die verschiedenen Möglichkeiten für a und b durch (siehe Tabelle), dann erhält man $a=3$ und $b=-5$ und
somit $x^2 - 2x - 15 = (x+3)\cdot(x-5)$.

a	b	a + b
1	–15	–14
3	**–5**	**–2**
5	–3	2
15	–1	14

8. **Geeignete Gruppierung:**

$3 + 4b + 6a + 8ab = \mathbf{3 + 6a} + \mathbf{4b + 8ab}$

$3 + 6a = 3\cdot(1+2a)$
$4b + 8ab = 4b\cdot(1+2a)$

$= 3\cdot\mathbf{(1+2a)} + 4b\cdot\mathbf{(1+2a)} = (3+4b)\cdot(1+2a)$

Ausklammern des gemeinsamen Terms $1 + 2a$

Wenn keine der zuvor beschriebenen Faktorisierungen möglich sind, dann ist oft noch ein Test sinnvoll, ob der Term durch eine quadratische Ergänzung vereinfacht werden kann:

Definition

Unter **quadratischer Ergänzung** versteht man die Addition eines Terms in der Weise, dass dieser sich mithilfe der binomischen Formeln als Quadrat einer Summe oder Differenz schreiben lässt.

Beispiele

1. Der Term $x^2 - 8x$ soll quadratisch ergänzt werden.
Lösung:
Wegen des Minuszeichens muss die 2. binomische Formel verwendet werden.

$$\begin{array}{rcl} (x-p)^2 & = & x^2 - \mathbf{2\cdot p}\cdot x + p^2 \\ & & \qquad \Updownarrow \\ & & x^2 - \quad \mathbf{8}\cdot x \end{array}$$

In der 2. binomischen Formel steht das mittlere Glied $-2px$, welches mit $-8x$ verglichen wird. Hieraus entnimmt man durch Vergleich der beiden Zeilen sofort $p = 4$.

$$\begin{array}{rcl} (x-4)^2 & = & x^2 - \mathbf{2\cdot 4}\cdot x \quad \mathbf{+p^2} \\ & & \Updownarrow \qquad \Updownarrow \qquad \Updownarrow \\ (x-4)^2 & = & x^2 - \quad \mathbf{8}x \qquad \mathbf{+16} \end{array}$$

Setzt man $p = 4$ in die binomische Formel ein, dann erhält man den gewünschten quadratisch ergänzten Term $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$

Der Term $x^2 - 8x$ kann also durch den Summanden $\mathbf{+16}$ quadratisch ergänzt werden: $x^2 - 8x \mathbf{+16} = (x-4)^2$.

Damit lässt sich der Ausgangsterm auch in der Form $x^2 - 8x = (x-4)^2 \mathbf{- 16}$ schreiben. Der Summand 16, der zum Erreichen einer binomischen Formel dazugefügt wurde, muss also sofort wieder subtrahiert werden, damit die Terme äquivalent bleiben.

2. Ergänzen Sie $z^2 + z$ quadratisch:

Lösung:
Hier muss die 1. binomische Formel verwendet werden.

$$\begin{array}{rcl} (z+p)^2 &=& z^2 + 2\cdot p\cdot z + p^2 \\ & & \Updownarrow \\ & & z^2 + \quad z \\ (z+\frac{1}{2})^2 &=& z^2 + \quad z \quad \mathbf{+\frac{1}{4}} \end{array}$$

Vergleich der beiden Zeilen liefert $2pz = z$ und damit $2p = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{1}{2}$ und durch Quadrieren $p^2 = \frac{1}{4}$.

Also lässt sich der Ausgangsterm schreiben:
$z^2 + z = (z+\frac{1}{2})^2 \mathbf{- \frac{1}{4}}$

3. Ergänzen Sie den Term quadratisch: $4u^2 - 7u$

Lösung:

$$\mathbf{4}u^2 - 7u = 4\cdot\left[\mathbf{u^2 - \frac{7}{4}u}\right]$$

Faktor 4 ausklammern. Für den Klammerterm liefert die 2. binomische Formel $p = \frac{7}{8}$. $p^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2$ wird addiert und sofort wieder subtrahiert.

$$= 4\cdot\left[\mathbf{u^2 - \frac{7}{4}u + \left(\frac{7}{8}\right)^2} - \left(\frac{7}{8}\right)^2\right]$$

2. binomische Formel anwenden

$$= 4\cdot\left[\mathbf{\left(u - \frac{7}{8}\right)^2} - \frac{49}{64}\right]$$

Eckige Klammern ausmultiplizieren

$$= 4\cdot\left(u - \frac{7}{8}\right)^2 - \frac{49}{16}$$

Aufgaben

31. Klammern Sie möglichst viel aus:

a) $18ab - 24bc^2$ b) $39r^2xy - 26rx^2y^3 + 52rx^3y$

c) $24a^3b^4 - 36a^4b^3 + 18a^4b^4$ d) $16a\sqrt{b} + 24b\sqrt{a}$

32. Wenden Sie zur Faktorisierung eine binomische Formel an:

a) $x^2 - y^2$ b) $r^2 - 6rs + 9s^2$

c) $4a^2 + 20abc + 25b^2c^2$ d) $x^4 - 10x^2 + 25$

e) $r^6 - 12r^4 + 36r^2$ f) $16a^2b^4 - 25a^4c^2$

33. Prüfen Sie, ob sich eine binomische Formel zur Faktorisierung verwenden lässt. Klammern Sie gegebenenfalls zunächst einen gemeinsamen Faktor aus.

a) $r^2 - rs + 4s^2$
b) $36x^6 - 16x^4$
c) $a^3 - 2a^2b + ab^2$
d) $5r^2s - 30rst + 45st^2$
e) $8a^4b^2 - 48a^3b + 72a^2$
f) $28r^2s^4 - 63t^2$

34. Wenden Sie den Satz des Vieta zur Faktorisierung an. Klammern Sie gegebenenfalls zunächst einen Faktor aus.

a) $x^2 + 3x + 2$
b) $x^2 + 9x + 18$
c) $y^2 + 10y + 9$
d) $u^2 - 3u - 28$
e) $u^4 - u^2 - 20$
f) $z^2 - 14z + 48$
g) $3a^2 - 3a - 36$
h) $6p^2q - 18pq - 60q$

35. Verwandeln Sie die Summe in ein Produkt, indem Sie geeignet gruppieren:

a) $4 + 16x + 9a + 36ax$
b) $12rs - 9st + 16r^2 - 12rt$
c) $1 + x + x^2 + x^3$
d) $14a^2b - 35ab^2 - 6ab^2 + 15b^3$
e) $30a + 40b + 20c + 6ab + 8b^2 + 4bc$

36. Faktorisieren Sie die Terme.

a) $a^2 - 5a - 24$
b) $x^2 + 20x + 100$
c) $25r^2z^4 - 36z^6$
d) $2a^4 - 98$
e) $a^2 + 8ab^2 + 16b^4$
f) $3x^2 - 9xy - 54y^2$
g) $30xy + 3x^2 + 75y^2$
h) $8p^2z - 16pz - 120z$
i) $3x^2 + 9xy + 6y^2$
j) $7r^3 - 28r^2s^2 + 28rs^4$
k) $2p^2 - 28p + 96$
l) $x^6 - 81x^2y^4$

37. Ergänzen Sie den Term quadratisch.

a) $x^2 - 6x$
b) $a^2 + 10a$
c) $r^2 + r$
d) $x^4 - 4x^2$
e) $4a^2 - 4a$
f) $9x^4 - 18x^2$

d) $(2x-1)^4 = (2x-1)^2 \cdot (2x-1)^2 = (4x^2-4x+1)\cdot(4x^2-4x+1)$
$= 16x^4 - 16x^3 + 4x^2 - 16x^3 + 16x^2 - 4x + 4x^2 - 4x + 1$
$= 16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$

e) $(a-5)^4 = (a-5)^2 \cdot (a-5)^2 = (a^2-10a+25)\cdot(a^2-10a+25)$
$= a^4 - 10a^3 + 25a^2 - 10a^3 + 100a^2 - 250a + 25a^2 - 250a + 625$
$= a^4 - 20a^3 + 150a^2 - 500a + 625$

f) $(x+1)^5 = (x+1)^2 \cdot (x+1)^2 \cdot (x+1) = (x^2+2x+1)\cdot(x^2+2x+1)\cdot(x+1)$
$= (x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + x^2 + 2x + 1)\cdot(x+1)$
$= (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1)\cdot(x+1)$
$= x^5 + x^4 + 4x^4 + 4x^3 + 6x^3 + 6x^2 + 4x^2 + 4x + x + 1$
$= x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$

31. a) $18ab - 24bc^2 = 6b \cdot (3a - 4c^2)$

b) $39r^2xy - 26rx^2y^3 + 52rx^3y = 13rxy \cdot (3r - 2xy^2 + 4x^2)$

c) $24a^3b^4 - 36a^4b^3 + 18a^4b^4 = 6a^3b^3 \cdot (4b - 6a + 3ab)$

d) $16a\sqrt{b} + 24b\sqrt{a} = 8 \cdot (2a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a})$
Unter Ausnutzung von Wurzelregeln lässt sich der Term auch schreiben als: $16a\sqrt{b} + 24b\sqrt{a} = 8\sqrt{ab} \cdot (2\sqrt{a} + 3\sqrt{b})$ (weil z. B. $\sqrt{ab}\cdot\sqrt{a} = a \cdot \sqrt{b}$)

32. a) $x^2 - y^2 = (x+y)\cdot(x-y)$ 3. binomische Formel

b) $r^2 - 6rs + 9s^2 = (r-3s)^2$ 2. binomische Formel

c) $4a^2 + 20abc + 25b^2c^2 = (2a+5bc)^2$ 1. binomische Formel

d) $x^4 - 10x^2 + 25 = (x^2-5)^2$ 2. binomische Formel

e) $r^6 - 12r^4 + 36r^2 = (r^3 - 6r)^2$ 2. binomische Formel

f) $16a^2b^4 - 25a^4c^2 = (4ab^2 + 5a^2c)\cdot(4ab^2 - 5a^2c)$ 3. binomische Formel

33. a) Auf $r^2 - rs + 4s^2$ lässt sich keine binomische Formel anwenden (der mittlere Summand müsste $-4rs$ sein).

b) $36x^6 - 16x^4 = (6x^3 + 4x^2)\cdot(6x^3 - 4x^2)$ 3. binomische Formel
oder alternativ:
$36x^6 - 16x^4 = 4x^4 \cdot (9x^2 - 4) = 4x^4 \cdot (3x-2)\cdot(3x+2)$

c) $a^3 - 2a^2b + ab^2 = a \cdot (a^2 - 2ab + b^2) = a \cdot (a-b)^2$ 2. binomische Formel

d) $5r^2s - 30rst + 45st^2 = 5s \cdot (r^2 - 6rt + 9t^2) = 5s \cdot (r-3t)^2$

e) $8a^4b^2 - 48a^3b + 72a^2 = 8a^2 \cdot (a^2b^2 - 6ab + 9) = 8a^2 \cdot (ab-3)^2$

f) $28r^2s^4 - 63t^2 = 7 \cdot (4r^2s^4 - 9t^2) = 7 \cdot (2rs^2 + 3t) \cdot (2rs^2 - 3t)$

34. a) Nach dem Satz von Vieta sind zwei Zahlen zu finden, deren **Summe 3** und deren **Produkt 2** ist. Dies gilt für die Zahlen 1 und 2 ($1+2=3$ und $1 \cdot 2 = 2$), sodass der Term folgendermaßen faktorisiert werden kann: $x^2 + 3x + 2 = (x+1) \cdot (x+2)$

b) Zwei Zahlen mit dem **Produkt 18** müssen als **Summe 9** ergeben. Dies gilt für die Zahlen 6 und 3: $x^2 + 9x + 18 = (x+3) \cdot (x+6)$

c) **Summe 10**, **Produkt 9** wird mit den Zahlen 1 und 9 möglich: $y^2 + 10y + 9 = (y+1) \cdot (y+9)$

d) Eine Zahl muss negativ sein, die andere positiv. Das **Produkt −28** und die **Summe −3** wird erreicht von den Zahlen −7 und 4: $u^2 - 3u - 28 = (u-7) \cdot (u+4)$

e) **Summe −1** und **Produkt −20** mit den Zahlen −5 und 4, sodass sich als faktorisierter Term $u^4 - u^2 - 20 = (u^2 - 5) \cdot (u^2 + 4)$ ergibt.

f) Wegen des positiven Produkts 48 und der negativen Summe sind zwei negative Zahlen zu finden, die das **Produkt 48** und die **Summe −14** ergeben. Dies gilt für −6 und −8, und es folgt: $z^2 - 14z + 48 = (z-6) \cdot (z-8)$

g) $3a^2 - 3a - 36 = 3 \cdot (a^2 - a - 12)$ Nach dem Ausklammern des Faktors 3 findet man die Zahlen −4 und 3, die das **Produkt −12** und die **Summe −1** ergeben. Es folgt: $3a^2 - 3a - 36 = 3 \cdot (a-4) \cdot (a+3)$

h) $6p^2q - 18pq - 60q = 6q \cdot (p^2 - 3p - 10)$ Die **Summe −3** und das **Produkt −10** ist mit den Zahlen −5 und 2 möglich. Also:
$6p^2q - 18pq - 60q = 6q \cdot (p^2 - 3p - 10) = 6q \cdot (p-5) \cdot (p+2)$

35. a) $\mathbf{4 + 16x + 9a + 36ax} = 4 \cdot (1+4x) + 9a \cdot (1+4x) = (4+9a) \cdot (1+4x)$

b) $\mathbf{12rs - 9st + 16r^2 - 12rt} = 3s \cdot (4r-3t) + 4r \cdot (4r-3t) = (3s+4r) \cdot (4r-3t)$

c) $\mathbf{1 + x + x^2 + x^3} = 1 \cdot (1+x) + x^2 \cdot (1+x) = (1+x^2) \cdot (1+x)$